

Algèbre 10 – Endomorphismes symétriques, formes quadratiques

Exercice 1 – Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par la relation

$$\Phi(x, y) = (2x + y - 1)^2 + (x - 1)^2 + (2y - 1)^2.$$

Prouver que Φ a un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, déterminer la valeur de ce minimum ainsi que les points où ce minimum est atteint. (Réponses $(x, y) = (\frac{3}{7}, \frac{3}{7})$, minimum : $\frac{3}{7}$)

Exercice 2 – Soit E un espace euclidien, et soit p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Exercice 3 – (d'après oral ESCP 1999)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Soit a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés.

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables.
2. Calculer A^2 et B^2 . En déduire les valeurs propres de A et B .
3. Déterminer les sous-espaces propres de A et B .
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices de a et b sont diagonales.

Exercice 4 – (Polynômes de Jacobi)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P, Q de E , on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$.

1. (a) Justifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.
(b) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Soit φ définie sur E par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E .
3. Déterminer les valeurs propres de φ , notées $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, ordonnées par ordre croissant. Soit P_k un vecteur propre associé à λ_k ; déterminer le degré de P_k . Montrer que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
4. Soit $k \geq 1$. Montrer que P_k possède au moins une racine d'ordre impair dans $] -1, 1[$.
Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines d'ordre impair de P_k sur $] -1, 1[$ et $S = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$.
Du calcul de $\langle S, P_k \rangle$, déduire que P_k possède k racines simples toutes dans $] -1, 1[$.

Exercice 5 – (D'après Ecricome 2000)

Soit m un entier supérieur ou égal à 3. Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}^m$ est muni de sa structure euclidienne canonique, et on identifie $\mathbb{R}^m$ à l'ensemble des vecteurs colonnes $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, on note respectivement E_M et F_M le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est de type n si ${}^t A = A^n$.

1. Quelles sont les matrices de type -1 ? de type 0 ? de type 1 ?

Désormais, on suppose que $n > 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ une matrice de type n .

2. (a) Établir l'égalité $A^{(n^2)} = A$.

- (b) On pose $B = A^{n+1}$. Montrer que $B^n = B$, et que B est une matrice symétrique.
 - (c) B est-elle diagonalisable ? Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
 - (d) Soit V un vecteur propre associé à la valeur propre -1 . En calculant tVBV de deux manières différentes, montrer qu'on aboutit à une contradiction et qu'ainsi, -1 ne peut pas être valeur propre de B .
 - (e) Montrer que B est une matrice de projecteur orthogonal.
3. (a) Montrer que $E_B \subset E_A$, puis que $E_B = E_A$.
 - (b) Montrer que $F_A = F_B$ et que E_A et F_A sont supplémentaires orthogonaux.
 4. Soit U un vecteur de F_A . Montrer que $\|AU\| = \|U\|$.
 5. Montrer que si A est inversible et de type n , alors A est aussi de type -1 .
 6. Montrer que si A est à la fois de type n et de type $n+1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

Exercice 6 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer une base orthonormale de chacun de ses espaces propres, et en déduire une matrice P telle que tPAP soit diagonale.

Exercice 7 – Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Déterminer la droite de régression de y en x de ce nuage de points.

Exercice 8 – (ESCP 2009) Soit E un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme f de E est appelée contraction si pour tout x de E , $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Donner un exemple de contraction de E .
2. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.
 - (a) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de f , on a $|\lambda| \leq 1$.
 - (b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que pour tout x de E :

$$\|P(f)(x)\| \leq \sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |P(\lambda)| \cdot \|x\|.$$

où $\text{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f .

3. On suppose désormais que f est un endomorphisme inversible de E , et on note M sa matrice associée dans la base canonique de E .
 - (a) Montrer que tMM est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^tMM = S^2$.
 - (b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $M = OS$.
 - (c) Montrer qu'il existe un unique couple (O, S) , O orthogonale, S symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que $M = OS$.
 - (d) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S , on a $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 9 – (ESCP 2009)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n . Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A . On dit qu'une matrice symétrique A est positive si $\langle A(x), x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit alors $0 \preceq A$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. En déduire que si A est une matrice positive inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice A^{-1} est positive.

2. Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \preceq B$ si et seulement si $0 \preceq B - A$. Montrer que $A \preceq B$ implique $({}^tM)AM({}^tM)BM$ pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver également que $0 \preceq A \preceq I$ si et seulement si $\sigma(A) \subset [0, 1]$ (0 et I désignent respectivement la matrice nulle et la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.
 - (b) Soit λ une valeur propre non nulle de AB et x un vecteur propre associé à λ . Montrer que Bx est un vecteur propre de BA associé à λ .
 - (c) En déduire que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.
4. Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Justifier le fait que M puisse s'écrire sous la forme $M = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i ({}^tX_i)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de vecteurs-colonnes orthonormée.
 - (b) Montrer que la matrice $L = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} X_i ({}^tX_i)$ est positive et vérifie l'égalité $L^2 = M$.
 Prouver que L commute avec M . On admet que c'est la seule matrice positive dont le carré vaut M et on la note $\sqrt{M}$ ou $M^{\frac{1}{2}}$.
 Montrer que si M est de plus inversible, alors on a $(\sqrt{M})^{-1} = \sqrt{M^{-1}}$.

Exercice 10 – (QC ESCP 2011)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout i .

Montrer que A est définie positive, c'est-à-dire que A est symétrique réelle telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXAX > 0$.

Exercice 11 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive (ie la forme bilinéaire associée est définie positive).

1. Quel est le signe des valeurs propres de A ?
2. Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n . On note B la matrice déduite de A par permutation des lignes i et j . Montrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles.
Indication : écrire $B = PA$ et $A = S^2$.

Exercice 12 –

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable?
2. Déterminer une matrice orthogonale P telle que tPAP est diagonale.

Exercice 13 – Les formes quadratiques ci-dessous sont-elles positives ? Strictement positives ? Déterminer l'endomorphisme symétrique associé.

1. $q(X) = 2x^2 - 2y^2 + 3xy$
2. $q(X) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz$
3. $q(X) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2 - 2xy + 2xt - yt - zt$.

Exercice 14 – Transformation de Legendre

Soit n un entier naturel non nul. On se place dans $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$,

on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sa colonne associée.

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n , symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = {}^tXAX$.

1. (a) Soit $p \in E$ fixé. On pose $F(x) = \langle p, x \rangle - f(x)$. Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ telle que si $x = \sum_{i=1}^n z_i e'_i$, alors $F(x) = \sum_{i=1}^n (p'_i z_i - \lambda_i z_i^2)$, où les p'_i et les λ_i sont des réels à déterminer.
- (b) Montrer que la fonction F est majorée sur E et atteint sa borne supérieure.

On définit alors l'application $L(f) : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L(f)(p) = \max_{x \in E} (\langle p, x \rangle - f(x)).$$

Cette application est appelée transformée de Legendre de f .

2. (a) Montrer qu'il existe une matrice carrée B d'ordre n et symétrique, que l'on déterminera, telle que :

$$\forall p = (p_1, \dots, p_n) \in E, \quad L(f)(p) = {}^t P B P.$$

- (b) En déduire $L(L(f))$.