**Algèbre 2 – Révisions d'algèbre linéaire (point de vue matriciel)**

**Exercice 1** – Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $d$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire $u^n = 0$ pour $n$ assez grand). On note $n$ l'indice de nilpotence de $u$ (c'est-à-dire $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.
2. Comparer $n$ et $d$.
3. Si $n = d$, justifier l'existence d'une base dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 2** – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \neq 0$, et $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3** –

*Soit $n$ un entier naturel non nul, et soit $E$ un espace vectoriel de dimension $4n$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^4 = 0$, et tel que $\operatorname{rg} f^2 = 2n$.*

1. (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3$, et que $\operatorname{Im} f^3 \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Im} f^2$.
   (c) Soit $g$ la restriction de $f$ à $\operatorname{Im} f$. Montrer que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ et que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$.
   (d) En déduire le rang de $f$.
   (e) En considérant $h$ la restriction de $f$ à $\operatorname{Im} f^2$, calculer de même le rang de $f^3$.
   (f) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_{4n})$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

   (matrice carrée d'ordre $4n$ constituée de $n$ blocs d'ordre 4 sur la diagonale, et de 0 partout ailleurs)
   *Indication : Considérer une base $(b_4, b_8, \dots, b_{4n})$ d'un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} f^3$ *dans $E$.*

2. **Application numérique, pour $n = 1$.**

*Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $A$.*

(a) Calculer $A$, $A^2$, $A^3$, $A^4$, $A^n$ pour tout $n > 4$. Déterminer leur rang.

(b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f^3$, et compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

(c) En déduire une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dans laquelle la matrice de $f$ est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Exprimer la matrice de passage $P$ de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$. Donner une relation entre $P$, $A$ et $M$.

(e) Donner une expression de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$ sous forme d'un produit de trois matrices.

**Exercice 4** – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{rg}(f^2)$, $\dim(\operatorname{Ker}(f))$, $\dim(\operatorname{Ker}(f^2))$, et montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de $f$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5** – **(Oral ESCP 2009)** On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On appelle *carré magique* d'ordre 3, toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les sommes des coefficients de chacune des trois lignes, de chacune des trois colonnes et de chacune des deux diagonales soient égales. Cette somme est notée $s(M)$.
On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble des carrés magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $s$ définie sur $\mathcal{C}$, qui à tout $M$ de $\mathcal{C}$ associe le réel $s(M)$, est linéaire et que :
$$C = \mathrm{Vect}(J) \oplus \operatorname{Ker} s$$
2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que :
   $$\operatorname{Ker} s = (\mathcal{S} \cap \operatorname{Ker} s) \oplus (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}).$$
   (b) Déterminer $A \cap \mathcal{C}$ et $\mathcal{S} \cap \operatorname{Ker} s$. En déduire une base de $\mathcal{C}$.
   (c) Déterminer un vecteur propre commun à tous les carrés magiques. En déduire tous les carrés magiques $M$ pour lesquels $M^2$ est un carré magique.

**Exercice 6** – **(ESCP 2010)**
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
On note $v_1$ le vecteur $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M$ avec :
$$M = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(les coefficients diagonaux valent 0 et les autres valent $\frac{1}{n-1}$)
On note $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) La matrice $M - I$ est-elle diagonalisable ?
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$.
2. Soit $p$ le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$.
   (a) Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_1), \dots, p(e_n)$.
   (b) Expliciter la matrice $P$ de $p$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit $q$ le projecteur sur $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$. Expliciter la matrice $Q$ de $q$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Exprimer $M$ comme combinaison linéaire de $P$ et $Q$. En déduire $M^k$ pour tout entier naturel $k$ non nul. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k$ (la limite s'entendant coefficient par coefficient).
5. Justifier que $M$ est inversible et exprimer $M^{-1}$ ainsi que $M^{-k}$, pour tout entier naturel non nul $k$, en fonction de $P$ et $Q$.

**Exercice 7 – temps idéal : 1h**

*Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $E$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

*On note, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $b_i$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i \mathrm{e}^x$.*

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel, et que $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_n)$ en est une base. Quelle est la dimension de $E$ ?
2. (a) Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $E$.
   (b) Déterminer la matrice $A$ de $D$ relativement à la base $\mathcal{B}$
   (c) L'endomorphisme $D$ est-il un isomorphisme ? Est-il diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants.
3. *Soit $B = A - I_{n+1}$, où $I_{n+1}$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, et soit $f$ l'endomorphisme associé à la matrice $B$ relativement à la base $\mathcal{B}$.*
   (a) Déterminer en fonction des $b_i$ l'expression de $f(b_j)$, $j \in [\![0, n]\!]$.
   (b) En déduire l'expression de $f^k(b_j)$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer $B^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$
   (d) En déduire $A^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Déterminer à l'aide de la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k$-ième de la fonction $b_n$. Retrouver ce résultat directement à l'aide d'une formule du cours.
4. **Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que $n = 5$.**
   (a) Déterminer $A^{-1}$.
   (b) En déduire une primitive de la fonction $b_5$.
   (c) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^5 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. Quel résultat classique retrouve-t-on ?
5. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de $D$ est :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8 – (QC HEC 2010)**

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, et $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$, où $f_k : x \mapsto x^k \mathrm{e}^{-x}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $E$. En déduire la dimension de $E$.
2. Soit $D$ l'application définie sur $E$ par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f' - f''.$$

où $f'$ et $f''$ désignent les dérivées première et seconde de $f$.

Montrer que $D$ est un endomorphisme de $E$ et écrire sa matrice $M$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. $M$ est-elle inversible ? diagonalisable ?

**Exercice 9** – (extrait de EDHEC 1999) *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$*, on note* id *l'endomorphisme identité de* $\mathbb{R}^2$*, et* 0 *l'endomorphisme nul. On note* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*· Le but de cet exercice est de trouver les couples* $(u, v)$ *d'endomorphismes de* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant les quatre assertions suivantes :*

$$(A_1) \quad u^2 = u \circ u = -\mathrm{id} \qquad (A_2) \quad v \neq \mathrm{id}$$
$$(A_3) \quad (v - \mathrm{id})^2 = 0 \qquad (A_4) \quad \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) \neq \{0\}.$$

1. **Étude d'un exemple.** Vérifier que les endomorphismes $u$ et $v$ dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont solutions du problème posé.
2. **Retour au cas général**
   (a) i. Montrer que $u$ et $v$ sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$.
   Donner $u^{-1}$ et $v^{-1}$ en fonction de $u$, $v$ et id.
   ii. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v^n$ comme combinaison linéaire de $v$ et id.
   (b) i. Établir que $\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$.
   ii. En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que $\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$.
   (c) Montrer en raisonnant par l'absurde que $\dim \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) = 1$.
   (d) Soit $(b_2)$ une base de $\mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id})$ ; on pose $b_1 = -u(b_2)$.
   i. Montrer que $\mathcal{B}' = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   ii. Donner les matrices de $u$ et $v$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (e) Donner la conclusion de cet exercice.

**Exercice 10** – Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(P) = -\frac{1}{6}P^{(3)}(0) \cdot (X^3 - X^2 - 2X) - \frac{1}{2}P''(0) \cdot (X^2 - 3X) + 2XP'(0) + 2P(0).$$

1. Vérifier que la formule ci-dessus définit effectivement un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice $A = [f]_{\mathcal{B}}$ de $f$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X, X(X - 1), X(X - 1)(X - 2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Exprimer la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
5. Exprimer la matrice $B = [f]_{\mathcal{B}'}$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Calculer $B^n$ ; en déduire $A^n$.

**Exercice 11** – Soit $n$ un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $\alpha$ un nombre réel non nul. On considère $f : E \to E$ définie par $f(P) = P(X + \alpha)$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $E$. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Montrer que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $p < q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} (-1)^{q-k} \binom{k}{p} \binom{q}{k} = 0.$$