Algèbre 3 – Calcul matriciel (point de vue technique)

Exercice 1 – Produit matriciel

1. (15 secondes)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_7 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (30 secondes)

$$P_7 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_9 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – Rang d'une matrice

Déterminer le rang des matrices suivantes

1. (10 secondes)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad M_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. (20 à 30 secondes)

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad M_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{15} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad M_{18} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (1 minute)

$$M_{19}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&3\end{pmatrix}\qquad M_{20}=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&2&2&2\\3&5&1&3\\1&1&3&4\end{pmatrix}\qquad M_{21}=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&-2&2&-4\\5&3&3&2\\0&2&-1&4\end{pmatrix}\qquad M_{22}=\begin{pmatrix}1&3&4&1&1\\2&1&0&1&1\\0&2&0&1&1\\1&0&-1&4&0\end{pmatrix}$$

4. (3 minutes)

$$M_{23}=\begin{pmatrix}1&3&4&0&1\\1&2&4&1&1\\0&1&0&0&2\\2&4&1&2&0\\3&2&2&1&2\end{pmatrix}\qquad M_{24}=\begin{pmatrix}1&3&4&0&1\\1&2&4&1&4\\0&1&0&0&-2\\2&4&1&2&-6\\3&2&2&1&-2\end{pmatrix}\qquad M_{25}=\begin{pmatrix}1&2&0&1&4&-2\\2&3&1&0&6&0\\1&1&3&1&6&2\\-1&1&-1&0&-1&-3\\0&0&1&1&2&0\end{pmatrix}$$

Exercice 3 – Calcul de l'inverse d'une matrice
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1. (20 secondes)

$$A_1=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}2&2\\-1&1\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\qquad A_4=\begin{pmatrix}-7&2\\5&4\end{pmatrix}\qquad A_5=\begin{pmatrix}2&-8\\-5&-1\end{pmatrix}.$$

2. (5 minutes)

$$A_6=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&2\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad A_7=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\qquad A_8=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&2\\4&2&0\end{pmatrix}\qquad A_9=\begin{pmatrix}1&5&4\\2&-3&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}\qquad A_{10}=\begin{pmatrix}3&4&5\\5&6&7\\7&8&9\end{pmatrix}$$

3. (10 minutes)

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&1&0&1\\-1&3&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\qquad A_{11}=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&1&-1\\2&2&2&1\\-2&-1&2&5\end{pmatrix}\qquad A_{11}=\begin{pmatrix}3&-1&3&7\\2&2&0&1\\5&5&-2&5\\3&-1&4&4\end{pmatrix}$$

4. (20 minutes)

$$A_{12}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad A_{13}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\3&1&2&0&0\\0&3&1&2&0\\0&0&3&1&2\\0&0&0&3&1\end{pmatrix}\quad A_{14}=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0\\1&1&2&-2&1\\-2&1&0&1&0\\1&0&0&1&0\\2&0&3&1&-1\end{pmatrix}\quad A_{15}=\begin{pmatrix}1&3&5&1&2\\1&2&3&-1&-2\\3&1&3&1&3\\-1&-2&-3&-4&-5\\2&3&2&1&0\end{pmatrix}$$

Exercice 4 – Matrice d'une AL relativement à des bases Montrer que les applications f ci-dessus sont des applications linéaires de E dans F, et donner leur matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et de F.
(15 secondes à 1 minute suivant les cas)

1. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x-y,x+y)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c.
2. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+y,2x)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=$ b.c.
3. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+3y,2x+y)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$
4. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x+y,x-3y)$, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

5. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+2y,3x-3y)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

(<2 minutes)

6. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(3z-2x+y,x+y+z)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=$ b.c.
7. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x-2y-2z,x+y-z)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=$ b.c.

(<4 minutes)

8. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x-2y,y+z,z-x)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
9. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(2x-y-2z,y-z,2y+z)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
10. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=P-P'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c.
11. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=nXP-X^2P'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c.
12. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=\mathrm{id}$, $\mathcal{B}=(1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$, $\mathcal{C}=$ b.c.
13. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=\mathrm{id}$, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=(1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$
14. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=\mathrm{id}$, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=(1,1+X,1+X+X^2,\cdots,1+X+X^2+\cdots+X^n)$.
15. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$, $f(g)=g'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,\sin)$
16. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$, $f(g)=h:x\mapsto g(a+x)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,\sin)$
17. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$, $f(g)=g'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$
18. $E=F=\mathrm{Vect}(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$, $f(g)=h:x\mapsto g(a+x)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\cos,x\mapsto x\cos x,\sin,x\mapsto x\sin x)$
19. $E=F=\mathrm{Vect}(\exp\cdot\cos,\exp\cdot\sin)$, $f(g)=g-g'$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\exp\cdot\cos,\exp\cdot\sin)$.

(<10 minutes)

20. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $F=\mathbb{R}_1[X]$, $f(P)=R$, reste de la division de P par X^2-3X+2, $\mathcal{B}=$ b.c., $\mathcal{C}=$ b.c.
21. $E=F=\mathbb{R}_n[X]$, $f(P)=(X^2+1)P''-P'$, $\mathcal{B}=(1,(X-1),(X-2)^2,\dots,(X-n)^n$, $\mathcal{C}=$ b.c.

Exercice 5 – Changements de base

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ associé à la matrice A ci-dessous, relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Exprimer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, en se servant de la formule de changement de base.

(1 minute)

1. $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$
2. $A=\begin{pmatrix}-1&4\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$
3. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

(2 minutes)

1. $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=$ b.c., $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}'=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ b.c., $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

(3 minutes)

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' =$ b.c.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} =$ b.c.,$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' =$ b.c., $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 10 \right)$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, -12 \right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 10 \right)$

(6 minutes)

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ b.c., $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ b.c., $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(10 minutes)

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C}' =$ b.c.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 6 – Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$.

Exercice 7 – Résoudre, en discutant suivant la valeur de λ, le système suivant, d'inconnues x, y, z et t. On exprimera une base de l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 3t = \lambda \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + y - \lambda^2 t = 2 \end{cases}$$