Algèbre 4 – Diagonalisation

Exercice 1 – Déterminer les valeurs propres des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est M. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer M^n, ainsi qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $N^2 = M$.

$$1.\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.\ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 4.\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.\ M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 – Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & -6 \\ 4 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M_3 est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer A^n.

Exercice 4 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 – Soit u un endomorphisme nilpotent. Déterminer $\mathrm{Spec}(u)$.

Exercice 6 – Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension finie.

1. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle, alors $E_\lambda \subset \mathrm{Im}\, f$.
2. Montrer que si f est diagonalisable, alors $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E$.

Exercice 7 –
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4, $\mathcal{B}$ une base de E, et a un nombre complexe. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix},$$

et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de l'image et une base du noyau de f.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est diagonalisable, et diagonaliser A le cas échéant.

Exercice 8 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 9 – (d'après oral ESCP) – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I_3$.
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.

3. Déterminer les valeurs propres de B, et les sous-espaces propres associés. B est-elle diagonalisable ?
4. En utilisant une relation entre les valeurs propres de A et les valeurs propres de B, justifier que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction des matrices B et I.
6. On s'intéresse maintenant aux puissances de B.
   (a) On pose pour tout $n \geqslant 2$, $X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$, où Q_n et R_n sont deux polynômes tels que $\deg(R_n) < 2$.
   Justifier l'existence et l'unicité de Q_n et R_n, et déterminer R_n.
   (b) En déduire l'expression de B^n en fonction de I, B et n, pour $n \geqslant 0$.
   (c) Montrer que l'expression de B^n en fonction de I, B et n qui a été obtenue pour $n \geqslant 0$ est encore valable pour les entiers négatifs.

Exercice 10 – (Oral HEC) – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A.
3. Trouver toutes les matrices M réelles d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A = I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 – (d'après oral HEC) – Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$. Les déterminer.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Retrouver 1.
3. Diagonaliser M. Retrouver 1.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M + I_3)^n$. Retrouver à l'aide de ce calcul le résultat de la question 1.

Exercice 12 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

1. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\dim \mathrm{Ker}(u \circ v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Ker}(v)$.
2. Montrer plus généralement que pour tout $u_1, \dots, u_n$, de $\mathcal{L}(E)$, on a
$$\dim(\mathrm{Ker}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim \mathrm{Ker}(u_i).$$
3. Soit (uniquement dans cette question) $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}$.
   (a) Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda^3 = 1$, et en déduire que u admet au plus 3 valeurs propres, λ_1, λ_2, λ_3, que l'on explicitera.
   (b) Déterminer $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dim E_{\lambda_3}$, où : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.
   (c) En déduire que u est diagonalisable.
4. Pour tout polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ et tout endomorphisme u, on note $P(u) = a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0 \mathrm{Id}$.
   Soit u un endomorphisme de E, et P un polynôme tel que $P(u) = 0$.
   (a) Montrer que si λ est valeur propre de E, alors $P(\lambda) = 0$.
   (b) Montrer que si les racines de P sont simples, alors u est diagonalisable.
5. Réciproquement, montrer que si u est diagonalisable, il existe un polynôme P à racines simples tel que $P(u) = 0$.

Exercice 13 – *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *canoniquement associé à* A.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})^2$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Calculer M^n, puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 – (EDHEC 1997)
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels.
On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, B est donc une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1. Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. (a) Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$
   (b) Montrer que $\dim \operatorname{Im} g \leqslant 2$
   (c) Déduire des questions précédentes que $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leqslant 2$.
   (d) Conclure que $g \circ f$ n'est ni surjective ni injective.
3. En déduire une valeur propre de BA.

On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.
   (a) Montrer que $BX \neq 0$
   (b) Montrer que si λ est valeur propre de AB, alors λ est valeur propre de BA.
   (c) En déduire que BA est diagonalisable.

Exercice 15 – (EDHEC 2005) *Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *On note* tr *l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.*
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}) = \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.
   (c) Établir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) \oplus \operatorname{Vect}(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe
$$f(M) = M + \operatorname{tr}(M)I.$$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe
$$g(M) = M + \operatorname{tr}(M)J$$
   où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont la trace est nulle.
   On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   (c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Exercice 16 – (HEC 2010)
Soit a, b, c, α quatre nombres réels tels que $a \neq b$ et f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :
$$f(P) = (X - a)(X - b)P' + \alpha(X - c)P.$$

1. Question de cours : Equations différentielles $h'(x) = h(x)g(x)$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$ (en attribuant au polynôme nul le degré $-\infty$). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, α, n pour que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f, c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
   Dans toute la suite du problème, on suppose cette condition réalisée et on note f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit λ un réel.
   (a) Trouver deux réels A et B indépendants de x, qu'on exprimera en fonction de n, a, b, c, λ, tels que :
   $$\forall x \notin \{a, b\}, \quad \frac{nx - nc + \lambda}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$
   (b) Donner toutes les valeurs de λ telles que $(x-a)^A(x-b)^B$ soit un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_n.
   f_n est-il diagonalisable ? f_n est-il bijectif ?

Exercice 17 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver une relation entre A^2, A et I_4
2. Diagonaliser A.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver ce résultat à l'aide de la diagonalisation de A.

Exercice 18 – (QC HEC 2010)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ tel que :
$$(f - \mathrm{Id})^3 \circ (f - 2\mathrm{Id}) = 0 \qquad \text{et} \qquad (f - \mathrm{Id})^2 \circ (f - 2\mathrm{Id}) \neq 0.$$
Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 19 – Soit $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ défini par $f(P)(X) = P(X+1) - XP''(X)$. On admet que f est un endomorphisme. Déterminer sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 20 – (QC ESCP 2011)
Soient trois nombres complexes a, b, c. Calculer la matrice A^7, avec :
$$A = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} & a & b \\ 0 & 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 – (Oral ESCP 2011)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$;

(ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

Ces matrices sont dites stochastiques.

1. (a) $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{S}$ inversible. Son inverse A^{-1} est-il élément de $\mathcal{S}$?
2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
   Pour σ permutation de $[\![1, n]\!]$, on définit l'endomorphisme f_σ de E par : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On note A_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que A_σ appartient à $\mathcal{S}$.
   (b) Montrer que A_σ est inversible et que A_σ^{-1} est élément de $\mathcal{S}$
   (c) Que peut-on dire des valeurs propres (*a priori* complexes) de A_σ ?
   (indication non donnée : montrer qu'il existe $p > q$ tel que $\sigma^p = \sigma^q$)
3. Dans cette question, soit A un élément de $\mathcal{S}$ inversible tel que son inverse appartienne à $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que $A = A_\sigma$.