

Algèbre 5 – Diagonalisation : pour aller plus loin

Exercice 1 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (nX + 1)P(X).$$

1. Vérifier que φ est effectivement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de φ . Montrer que les seules racines possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont -1 et 1 . En déduire les valeurs propres de φ .
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 2 – Pour $n \geq 2$, on note E l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \vdots & b \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

I désigne la matrice identité, et J la matrice élément de E obtenue pour $a = 0$ et $b = 1$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que (I, J) en est une base.
2. Calculer J^k pour tout entier naturel k non nul. Prouver que E est stable par produit.
3. Pour $A = aI + bJ$, et $p \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de a , b et p les coordonnées de la matrice A^p dans la base (I, J) .
4. On considère un élément $A = aI + bJ$ de E , tel que $b \neq 0$.
 - (a) Prouver qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$
 - (b) En déduire les valeurs propres possibles de A
 - (c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Exercice 3 – Résolution d'une récurrence simultanée

Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Puissances de la matrice A

- (a) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$. Calculer P^{-1} .
- (b) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Suites « arithmético-géométriques » dans $\mathbb{R}^3$.

On définit les trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$, et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n + 3y_n + \frac{3}{2}z_n - 3 \\ y_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 2y_n + \frac{3}{2}z_n - 1 \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 3y_n + \frac{1}{2}z_n - 3. \end{cases}$$

On pose $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

- (a) Trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre X_n , X_{n+1} , A et B .
- (b) Montrer que $I_3 - A$ est inversible, et calculer son inverse.
- (c) En déduire un vecteur U de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = AU + B$.

- (d) En s'inspirant de la méthode usuelle de résolution des suites arithmético-géométriques, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice 4 – (HEC 2007)

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit φ l'application définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad [\varphi(P)](X) = P(X+1) - P(X).$$

2. (a) Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, et expliciter sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de E . On précisera l'élément $a_{i,j}$ de A , situé à la i -ième ligne et la j -ième colonne.
 (b) Déterminer le noyau et l'image de φ .
 (c) Déterminer un polynôme annulateur de φ .
 (d) Étudier la diagonalisabilité de φ .
3. (a) Soit $P \in E$. Montrer que :

$$\varphi^n(P)(X) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) \right],$$

où φ^n désigne la composée n fois : $\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$.

- (b) En déduire, pour $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la valeur de :

$$S_j = \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \binom{n}{k} k^j \right].$$

4. Retrouver le résultat de la question précédente pour $k \in \{0, 1, 2\}$, en considérant la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1-x)^n$.

Exercice 5 – (HEC 2010)

1. Question de cours : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle décroissante soit convergente.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$, et M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Montrer que le réel a est valeur propre de M_n si et seulement si le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1$ admet a pour racine.
 (b) Déterminer alors le sous-espace propre associé à a .
3. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, le polynôme P_k admet une unique racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$; on la note a_k .
 (b) Établir la convergence de la suite $(a_k)_{k \geq 2}$. Déterminer sa limite.
4. (a) Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, le polynôme P_{2p} admet une racine unique dans $\mathbb{R}_+$; on la note b_p .
 (b) Établir la décroissance, puis la convergence de la suite $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite ℓ .
 (c) Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_p - \ell)_{p \in \mathbb{N}^*}$.
5. (a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6 – (extrait de HEC eco 2004)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

Si $a_0, \dots, a_{2n}$ sont $2n+1$ complexes, et $Q \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k.$$

Partie I – Diagonalisation de s

1. **Généralités sur s .**

- (a) Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{2n}[X]$.
- (b) Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}_{2n}[X]$.

2. **Diagonalisation dans le cas particulier $n = 1$**

- (a) Quelle est la matrice M de s dans ce cas particulier ?
- (b) Déterminer les valeurs propres de M .
- (c) Montrer que M est diagonalisable, et la diagonaliser.
- (d) Donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$ constituée de vecteurs propres de s ; quelle est la matrice de s dans cette base ?
- (e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un endomorphisme t de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $t^k = s$. On exhibera un tel endomorphisme t (pas forcément unique) en donnant sa matrice dans la base canonique.

3. **Étude du cas général**

- (a) Montrer que $\text{Spec}(s) = \{-1, +1\}$ (on pourra considérer s^2)
- (b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de s (on pourra résoudre un certain système linéaire, en donnant une base de l'espace de ses solutions)
- (c) En déduire que s est diagonalisable, et donner une base de vecteurs propres, ainsi que la matrice de s dans cette base.

- (d) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$, et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice N telle que $M = N^k$. Donner k^{2n+1} matrices N différentes répondant à la question.

Exercice 7 – Recherche des racines carrées d'une matrice (extrait de CCP 2004)

Le but de cet exercice est de trouver les racines carrées d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire toutes les matrices R telles que $R^2 = A$. On étudie deux exemples.

1. **Exemple 1 :** $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

- (a) Diagonaliser la matrice A . On explicitera notamment une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$. On rangera les valeurs propres par ordre croissant sur la diagonale de D .
- (b) Calculer P^{-1} .
- (c) Montrer que R est une racine carrée de A si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D .
- (d) Soit S une racine carrée de D .
 - i. Montrer que $DS = SD$.
 - ii. En déduire que la matrice S est diagonale.
 - iii. Donner toutes les racines carrées de R .
- (e) Donner toutes les racines carrées de A (on laissera le résultat sous forme d'un produit faisant intervenir P et P^{-1})

2. **Exemple 2 :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, et soit n son indice de nilpotence, c'est-à-dire le seul entier tel que $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$.
 - i. Justifier l'existence d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit une famille libre.
 - ii. En déduire que $n \leq 3$.
- (b) Calculer A^2, A^3 .
- (c) Soit R une racine carrée de A . Que vaut R^4 ? R^6 ? Conclusion ?
- (d) Soit plus généralement $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence n .
 - i. Montrer que si $2n - 1 > p$, alors A n'admet pas de racine carrée.
 - ii. Exhiber, pour toute valeur de $p \geq 3$, une matrice A nilpotente et admettant une racine carrée R (on pourra commencer par définir R). Ainsi, on ne peut pas se passer de la condition $2n + 1 > p$.

Exercice 8 – (Extrait de Ecricome 1998)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. À toute fonction f de E , on associe la fonction F définie par $F : x \mapsto \int_x^{x+1} f(t) dt$.

- Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer F' .
- Déterminer F dans les cas suivants :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(2\pi x)$;
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1; \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$
- Soit T l'application de E dans lui-même définie par $f \mapsto T(f) = F$.
Montrer que T est linéaire. Est-elle injective ? surjective ?
- Montrer que 0 est valeur propre de T .
 - Montrer que pour tout réel a , la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre (i.e. un vecteur propre dans l'espace des fonctions) associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera en fonction de a .
 - Étudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$, et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T .

Exercice 9 –

- Soit la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Montrer que M n'a pas de valeurs propres réelles. Quelles sont ses valeurs propres complexes ?
 - En déduire qu'elle est inversible.
 - Calculer son inverse.
- Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme :

$$f(x) = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$
 - Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que les quatre fonctions $(\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x)$ forment une base de E . On note $\mathcal{B}$ cette base.
 - L'application qui à toute fonction f de E associe sa dérivée f' est-elle un endomorphisme de E ?
 - Écrire la matrice de l'application linéaire ci-dessus dans la base $\mathcal{B}$.
 - Montrer que toute fonction f appartenant à E possède une primitive et une seule appartenant à E .
 - Déterminer avec le moins de calculs possibles toutes les primitives de $x \mapsto x \sin x + \cos x$ et de $x \cos x + x \sin x$.
 - On considère maintenant M comme une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
 - Calculer $A^2, A - iI, (A - iI)^2, A + iI$ et $(A + iI)^2$.
 - Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à A . Montrer que la dimension de $\text{Ker}(f - i \cdot \text{id})^2 = 2$ et trouver une base (b_1, b_2) de $\text{Ker}(f - i \cdot \text{id})^2$, telle que $b_1 = f(b_2)$.
 - Trouver une base (b_3, b_4) de $\text{Ker}(f + i \cdot \text{id})^2$, telle que $b_3 = f(b_4)$.
 - Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base de $\mathbb{C}^4$.
Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$.
Déterminer P^{-1} .
 - Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.
 - Calculer B^n , en déduire A^n .
 - Calculer avec le moins de calculs possibles la dérivée n -ième des fonctions de la question 3c.

Exercice 10 – (QC ESCP 2010)

Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Indication non donnée : On pourra montrer que si f est l'endomorphisme canoniquement associé, $f^3 = 0$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, puis $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1)$, puis $f(e_2) \in \text{Vect}(e_1)$.)