Algèbre 6 – Diagonalisation : feuille technique

Exercice 1 – Diagonalisation
Lorsque c'est possible, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$:

1. (1 minute)
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (8 minutes)
$$M_5 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ -4 & 13 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$M_9 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 6 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} -17 & 12 & -88 \\ -24 & 17 & -132 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. (15 à 20 minutes)
$$M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad M_{14} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{15} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{16} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 – Soit E un ev de dimension 4, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres de f ; f est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 – (Oral HEC) – Soient trois suites réelles définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n - c_n. \end{cases}$

Déterminer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de a_0, b_0, c_0 et n. Convergence ?

Exercice 5 – Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & -6 \\ 4 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M_3 est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 – Diagonaliser les matrices suivantes. On calculera explicitement P^{-1}, l'inverse de la matrice de passage obtenue.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 – Les deux matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 – Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 –

1. Les deux matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $w_0 = 2$, $t_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n - v_n - 2w_n + t_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n - 2w_n + t_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n - w_n + 2t_n \\ t_{n+1} & = & 4u_n - 4v_n - 4w_n + 5t_n \end{array} \right.$$

   Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n, v_n, w_n, t_n en fonction de n.

Exercice 10 – Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, *i.e.* déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

Exercice 11 – Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *i.e.* déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. On ne demande pas le calcul de P^{-1}.

Exercice 12 – La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1})

Exercice 13 – Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Déterminer leurs valeurs propres.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 – Après avoir justifié qu'elles sont diagonalisables, diagonalisez les matrices suivantes (on donnera la matrice diagonale D_i, la matrice de passage P_i, la relation entre A_i, D_i et P_i, et on calculera P_i^{-1}).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 –
La matrice suivante est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 – La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 – **Exercice technique**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser (on ne demande pas le calcul de P^{-1}, l'inverse de la matrice de passage).
2. (a) Trouver un polynôme P de degré 2, annulateur de la matrice A.
   (b) À l'aide d'une division euclidienne, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et de la matrice identité I_3.
3. Justifier que A est inversible, et déterminer son inverse, ainsi qu'une expression de A^{-n} en fonction de A et de I_3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18 – Soit $A = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 – Trois enfants Alice, Bob et Carmen jouent avec une balle.
- Lorsque Alice a la balle, la probabilité qu'elle l'envoie à Bob est 0,75 et la probabilité qu'elle l'envoie à Carmen est 0,25.
- Lorsque Bob a la balle, il l'envoie à Alice avec une probabilité de 0,75 et à Carmen avec une probabilité de 0,25.

• Carmen envoie toujours la balle à Bob.

On désigne respectivement par A_n, B_n et C_n les probabilités pour qu'à l'issue du n-ième lancer, ce soit Alice, Bob ou Carmen qui ait la balle. A_0, B_0 et C_0 représente une probabilité initiale de possession de la balle. Par exemple, si on précise que Alice a initialement la balle, alors $A_0 = 1$, $B_0 = 0$ et $C_0 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 que l'on notera M, telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice M et les sous-espaces propres associés. On déterminera des bases de ces sous-espaces propres.
3. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P d'ordre 3 telles que $M = PDP^{-1}$. Expliciter P et P^{-1}.
4. En déduire la matrice M^n.
5. Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des probabilités A_n, B_n et C_n. Ces limites dépendent-elles de l'enfant qui avait la balle au début de jeu ?

Exercice 20 – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que A est diagonalisable, et exprimer P et D tels que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n.
2. (a) Montrer que $P = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A
   (b) Exprimer le reste de la division euclidienne de X^n par P, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   (c) Retrouver l'expression de A^n.

Exercice 21 – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de f et l'image de f, ainsi que le noyau de $f \circ f$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
3. On pose $e_1 = (1, 1, -1, -1)$ et $e_3 = (1, -1, -1, -1)$.
   (a) Déterminer un vecteur e_2 tel que $f(e_2) = e_1$ et un vecteur e_4 tel que $f(e_4) = e_3 + 2e_4$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et déterminer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer P^{-1}
   (d) Calculer $A' = P^{-1}AP$, et en déduire la valeur de A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) Déterminer, pour $n \geqslant 2$, l'image et le noyau de f^n.