Algèbre 7 – Formes bilinéaires, produits scalaires

Exercice 1 – Les applications ci-dessous sont-elles des formes bilinéaires ? Si oui, sont-elles symétriques ? définies ? positives ?

1. E l'espace vectoriel des séries convergentes à coefficients réels, $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi\left(\sum a_n, \sum b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$
2. De même si E est l'espace vectoriel des séries convergentes à termes positifs
3. $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, $\forall (M,N) \in$ E, $\Phi(M,N) = {}^tX\ {}^tMNX$.
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $\varphi(f,g) = f \circ g(0)$.

Exercice 2 – Dans tous les cas suivants, déterminer si φ est une forme bilinéaire sur E. Le cas échéant déterminer si elle est symétrique, définie, positive, et exprimer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{C}$, par deux méthodes.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' - xy' + x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' - xy' - x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
3. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' - 4xy' - 4x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' - xy' + zz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
5. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' - xy' + yz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
6. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' + yy' - 2xy' + zz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 3 – Soit $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Prouver que l'application $(u,v) \mapsto \mathrm{Re}(u\overline{v})$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$. Quelle est sa norme euclidienne associée ?

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$. Soit φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = -\int_0^1 P(x)Q''(x)\ \mathrm{d}x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E. Expliciter la norme euclidienne associée.

Exercice 5 – Montrer que les applications N ci-dessous définissent des normes sur E. Ces normes sont-elles euclidiennes ?

1. $E = \mathbb{R}^n$, $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E$, $\quad N(X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $N(X) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} P^2(k)}$.

Exercice 6 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

1. Montrer que $n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2 \leqslant \dfrac{n^2(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt[2^k]{i} \leqslant n \cdot \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$$

Exercice 7 – Soit f une application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, continue et strictement positive sur $[0,1]$. Démontrer que
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t}.$$
Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

Exercice 8 – Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(M) \leqslant \sqrt{n} \cdot \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2}$.
3. À quelle condition a-t-on l'égalité ?

Exercice 9 – Les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$ dont les matrices M_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont-elles des produits scalaires ?

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$
2. $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
5. $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
7. $M_7 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$
8. $M_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
9. $M_9 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 10 –

1. La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle un produit scalaire ? Exprimer, en s'y prenant de deux manières, sa matrice dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
2. Mêmes questions pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 – Montrer que les applications suivantes définissent des normes. Sont-elles euclidiennes ? Si oui, déterminer le produit scalaire associé.

1. $E=\mathbb{R}^n$, $\Phi(X)=|x_1|+\cdots+|x_n|$.
2. $E=\mathbb{R}^3$, $\Phi(X)=\sqrt{x^2+5y^2+4z^2-2xy+2xz+2yz}$
3. $E=\mathbb{R}^n$, $p\in\mathbb{R}_+^*$, $\Phi(X)=\sqrt[p]{|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p}$ (on pourra admettre l'inégalité triangulaire, provenant de l'inégalité de Hölder).
4. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $a\in\mathbb{R}$, $\Phi(P)=\sqrt{P(a)^2+P'(a)^2+\cdots+P^{(n)}(a)^2}$.
5. $E=\mathcal{C}^0([0,\pi])$, $\Phi(f)=\left(\displaystyle\int_0^\pi f^2(t)\sin t\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$
6. $E=\mathcal{C}^0([0,\pi])$, $\Phi(f)=\left(\displaystyle\int_0^\pi f^4(t)\sin t\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{4}}$.

Exercice 12 – Soit f et g deux fonctions réelles continues sur $[0,1]$, telles que f, g et $fg-1$ sont positives. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(x)\ dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\ dx\right)\geqslant 1.$$

Exercice 13 – Soit φ_i les formes bilinéaires canoniquement associées aux matrices M_i suivantes. Justifier que $X\mapsto\sqrt{\varphi(X,X)}$ définit une norme euclidienne, et déterminer le produit scalaire associé.

1. $M_1=\begin{pmatrix}1&-3\\1&2\end{pmatrix}$
2. $M_2=\begin{pmatrix}4&-3&1\\-1&5&0\\3&2&4\end{pmatrix}$
3. $M_3=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-2&2&-5&-5\\1&-3&9&3\\1&1&7&4\end{pmatrix}$

Exercice 14 – Montrer que pour tout $f\in\mathcal{C}^0[0,1]$,

$$\left|\int_0^1\frac{f(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\int_0^1\frac{(f(t))^2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\text{et}\qquad\left|\int_0^1\frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}\left(\int_0^1\frac{(f(t))^2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Déterminer dans chacun des deux cas quelles sont les fonctions pour lesquelles l'inégalité est une égalité.
(Indication globale : on pourra introduire un produit scalaire)

Exercice 15 – Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :'

$$\forall(u,v)\in E^2, f(u+v)-f(u-v)=4\langle u,v\rangle.$$

Exercice 16 – (QC ESCP 2009)
Soit $n\geqslant 2$, E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1,\dots,e_n)$, n vecteurs unitaires de E tels que pour tout $i\neq j$, $\|e_i-e_j\|=1$. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

Exercice 17 – (QC HEC 2010)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que le rang de A est égal au rang de ${}^tAA$.

Exercice 18 – (Oral ESCP 2011)
Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$. On considère une famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ de p vecteurs de E, où p est un entier tel que $p\geqslant 2$. On dit que cette famille est obtusangle si pour tout couple $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $i\neq j$ entraîne que $\langle u_i,u_j\rangle<0$ (ce qui impose aux vecteurs d'être tous non nuls).

1. On veut montrer par récurrence que si une famille de p vecteurs de E est obtusangle, alors toute sous-famille de $p-1$ vecteurs est libre.
   (a) Montrer que cette propriété est vérifiée pour $p = 2$.
   (b) On suppose que la propriété est vérifiée à un rang $p+1 \geqslant 2$, et on envisage une famille $(u_1, \dots, u_{p+2})$ obtusangle telle que la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ soit liée.
      i. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \langle u_{p+1}, u_k \rangle > 0$.
      ii. En déduire qu'il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_k < 0$ et montrer que l'on peut supposer $k = p$.
      iii. En considérant la famille $(y_1, \dots, y_{p+1})$ définie par :
      $$\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ y_i = u_i,\ y_p = u_{p+1} - \lambda_p u_p,\ y_{p+1} = u_{p+2},$$
      montrer qu'il y a une contradiction.
      iv. Conclure.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille obtusangle de vecteurs unitaires de E et v le vecteur de E défini par $v = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$.
   On veut montrer que $[\forall k \in [\![1, n]\!],\ \langle v, e_k \rangle \geqslant 0] \longrightarrow [\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \geqslant 0]$.
   (a) Soit p la projection orthogonale de E sur $(\mathrm{Vect}(e_{n+1}))^{\perp}$. Montrer que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:
   $$\langle p(e_i), p(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, e_{n+1} \rangle \times \langle e_j, e_{n+1} \rangle .$$
   (b) Montrer la propriété par récurrence sur n.