Algèbre 8 – Orthogonalité (1)

Exercice 1 – Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $Q_i = \prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

1. (a) Vérifier que pour tout couple (i, j) d'entiers de $[\![0, n]\!]$,
$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) En déduire que $(Q_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.
2. Démontrer que l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(A, B) = \sum_{i=0}^{n} A(x_i)B(x_i)$$
est un produit scalaire sur E, et que $(Q_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de E pour φ.
3. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de E dans cette base ?

Exercice 2 – Les familles suivantes sont-elles des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel) ? Sont-elles orthonormales ?

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
2. $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 3 – Déterminer une base de l'orthogonal de F dans E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$, ps canonique, $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$;
2. $E = \mathbb{R}^3$, ps canonique, $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
3. $E = \mathbb{R}^5$, ps canonique, $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
4. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, $F = \operatorname{Vect}(X, X^2 + 1)$.

Exercice 4 –

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$ dont on exprimera la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$, tel que $\mathcal{C}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Justifier qu'il existe un unique produit scalaire sur E tel que $\mathcal{B}$ soit une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 5 – Déterminer une base orthonormale du sous-espace F de E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$, ps canonique, $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
2. $E = \mathbb{R}^4$, ps canonique, $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$, $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.

Exercice 6 – Soit, F le sev de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Soit $X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal Y de X sur F.

Exercice 7 –

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y - 4z = 0$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1, 1)$.

Exercice 8 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9 – Soit Q l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad Q(X) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$.

1. Justifier que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $Q(X) \geqslant 0$.
2. On définit, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $N(X) = \sqrt{Q(X)}$. Montrer que N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à N.

Exercice 10 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Exercice 11 – Soit E un espace euclidien, et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ soit égale à ${}^tP \cdot P$. En déduire que la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est toujours inversible.

Exercice 12 – Soit E l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, +\infty[$, et telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\ \mathrm{d}t$ converge absolument.

1. Montrer que si f et g sont dans E, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[0, A]$, et faire tendre A vers $+\infty$.
2. En déduire que E est un espace vectoriel, et que $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
3. Soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est élément de E.
4. Déterminer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$

Exercice 13 – Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ la distance de $A = (1, 2, 0, 1)$ au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(0, 1, 1, 2)$ et $(-1, 1, 0, 0)$.

Exercice 14 – Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in E$. On rappelle que la trace de A est la somme des coefficients diagonaux de A, et est notée $\mathrm{tr}(A)$.

1. (a) Justifier que tr est une forme linéaire sur E.
   (b) Montrer que pour tout $(A, B) \in E^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(c) En déduire que et A et B sont deux matrices semblables, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

(d) Soit $n = 3$. Soit A une matrice symétrique de E dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0. On suppose que 1 et 2 sont des valeurs propres de A, les sous-espaces propres associés étant de dimension 1. Déterminer le spectre de A.

2. Justifier que $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(\,{}^tAB)$ définit un produit scalaire sur E. Exprimer $\langle A, B\rangle$ à l'aide des coefficients de A et de B. On considère désormais l'espace euclidien E, muni de ce produit scalaire.

3. Soit $n = 3$. Soit :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que la famille (J, K, L) est libre

(b) Déterminer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(J, K, L)$.

(c) Déterminer le projeté orthogonal de I_3 sur $\mathrm{Vect}(J, K, L)$.

Exercice 15 – Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $Q_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre).

1. Vérifier que l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(P, Q) \in E^2$ par
$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur E.
On suppose désormais E muni de ce produit scalaire, et on note $\Phi(P, Q) = \langle P, Q\rangle$.
2. Calculer Q_0, Q_1, Q_2.
3. Déterminer les éventuelles racines de P_n, ainsi que leur ordre de multiplicité.
4. Déterminer le degré de Q_n et son coefficient dominant.
5. Prouver, par récurrence sur k, que, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(k)}$ admet au moins k racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$.
6. À l'aide d'intégrations par parties, prouver que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant m$,
$$\langle Q_n, Q_m\rangle = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} P_n^{(n-m)}(t)\ \mathrm{d}t.$$
En déduire que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|Q_n\|$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $W_k = \dfrac{Q_k}{\|Q_k\|}$. Démontrer que $(W_0, \dots, W_n)$ est une base orthonormale du sev $\mathbb{R}_n[X]$ de $\mathbb{R}[X]$, et que cette base est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

Exercice 16 – Soit E un espace euclidien, et f un endomorphisme non nul de E tel que $\forall x \in E$, $x \perp f(x)$.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.
3. Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $\lambda = 0$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Soit $\mathcal{B}$ la famille obtenue comme réunion d'une base orthonormale de $\mathrm{Im}\, f$ et d'une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, et déterminer la forme de la matrice de f dans cette base.

Exercice 17 –

Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in N}$ telles que la série de terme général u_n^2 , $n \in N$ converge.

On rappelle (voir feuille 3) que le produit terme à terme de deux suites de ℓ^2 est encore dans ℓ^2, que ℓ^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que l'on définit un produit scalaire sur ℓ^2 par :

$$\forall (u, v) \in \ell^2,\ \ \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Soit F l'ensemble des suites de E nulles à partir d'un certain rang.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2.
2. Pour tout entier naturel i, on désigne par e_i la suite de E dont tous les termes sont égaux à 0 sauf le terme d'indice i qui est égal à 1. Vérifier que pour tout $i \in \mathbb{N}$, e_i appartient à F et en déduire que F n'est pas de dimension finie.
3. Démontrer que toute suite appartenant à F est combinaison linéaire d'un nombre fini de suites de la famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F dans ℓ^2 et vérifier que $F \oplus F^\perp$ est distinct de ℓ^2. Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 18 – (Ecricome 2003)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et on adopte les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *: ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.*
- $S_n(\mathbb{R})$ *: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.*
- $A_n(\mathbb{R})$ *: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.*

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$, où ${}^tA$ est la matrice transposée de A.
On définit les applications tr *et* φ *par :*
pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \qquad \textit{et} \qquad \varphi(A,B) = \mathrm{tr}(\,{}^tAB).$$

1. Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$
2. Prouver que tr est surjective. Donner la dimension du noyau de tr.
3. Prouver que φ définit un produit scalaire dont la norme associée $\|\cdot\|$ vérifie
$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$
4. Établir que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |\,\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\cdot\|A\|$.
5. Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour φ.
6. Soit $M = (m_{i,j})$. En déduire que pour tout matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\min_{M\in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ existe et vaut $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2$.

Exercice 19 – (Polynômes de Tchebychev)

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$: $\displaystyle\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall k \in \mathbb{N},\quad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k. \end{cases}$$
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$
4. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.