Analyse 1 – Révisions : suites

Exercice 1 – Étudier la convergence des suites définies par les récurrences ci-dessous :

(a) $u_0 \geqslant \dfrac{-3}{2},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$ (b) $u_0 > 0,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2}$ (c) $u_0 \neq 1,\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$

(d) $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4-u_n^2)$ (e) $u_0 \neq -5,\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+5}$ (f) $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 2 – *On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$, et la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.*
L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0 = 1$ et les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+2} = g(u_{2n+1}).$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} > 1$ et $u_{2n+2} > 0$.
2. Étudier le sens de variation de $g \circ f$ sur son domaine de définition.
3. En déduire que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer son sens de variation.
4. Montrer que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, et déterminer cette limite ℓ.
5. Vérifier que ℓ est un point fixe de f et de g.
6. Exprimer $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$, f et g. En déduire que ces trois suites convergent vers des limites que l'on déterminera. Préciser l'éventuelle monotonie de ces suites.
7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 3 – Expliciter, et déterminer un équivalent simple des suites définies par les récurrences suivantes :

1. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$;
2. $v_0 = 1$, $v_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \sqrt{2} \cdot v_{n+1} - \dfrac{v_n}{2}$.
3. $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n + 2n - 1$.
4. $x_0 = 1$, $x_1 = 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ x_{n+2} = -2x_{n+1} + 3x_n - 2$.
5. $x_0 = 1$, $x_1 = 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ x_{n+2} = -2x_{n+1} + 3x_n - 4$.

Exercice 4 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = -1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$, et que $0 < x_n \leqslant 1$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x_n)^{n+1} = 0$, puis que $\ell = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que $x_n - \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

Exercice 5 – (EDHEC 95)

0. Préliminaire : on rappelle que si (u_n) est une suite réelle, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$. En déduire que si (u_n) est une suite réelle convergente de limite a, strictement positive, alors il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $u_n \geqslant \frac{a}{2}$. Ce résultat pourra être admis dans la suite de l'exercice.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x(1-x)$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Étudier les variations de f.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = nu_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.
3. On suppose $L \neq 1$, montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}.$$

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
4. Montrer à l'aide de la question 2(b) que : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 6 – (Algorithme de Héron) Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.
4. Donner une condition pour que cette majoration puisse s'exprimer en fonction de a, u_0 et n. Quelle majoration obtient-on ?
5. On prend $u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. Reprendre la question à l'aide cette fois d'une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.

Exercice 7 – (ESCP 2010)

1. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Écrire la définition mathématique de la convergence de la suite (a_n) vers ℓ/
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1,\quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.
   (b) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \dfrac{1}{u_n^{\alpha}}\right)$ existe et est un réel non nul.
   (c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 8 – (ESCP 2010)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre des involutions de $[\![1,n]\!]$
On rappelle qu'un application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ est une involution si et seulement si $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

1. On pose $d_0 = 1$.
   (a) Calculer d_1, d_2, d_3.

(b) Montrer que : pour tout $n \geqslant 2$, $\quad d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$.

(c) Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `Function D(n:integer):integer;` permettant de calculer d_n.

2. On pose, pour tout réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$.

   (a) Prouver l'existence d'un développement limité pour f à tout ordre n au voisinage de 0.

   On peut donc définir une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que a_n soit le coefficient de x^n dans le développement limité, à un ordre au moins égal à n, de f. On a ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \displaystyle\sum_{\substack{p+2q=n\\(p,q)\in\mathbb{N}^2}} \frac{1}{p!} \times \frac{1}{2^q q!}$.

   (c) Montrer que la dérivée f' de f admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de 0 et le déterminer à l'aide des coefficients a_k.

   (d) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = a_n n!.$$

Exercice 9 –
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{u_n-1}$.

1. **Étude de l'existence de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   (a) Justifier que $f : x \mapsto \frac{2x+4}{x-1}$ est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et exprimer explicitement sa réciproque g.

   (b) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = g(v_n)$.
   Montrer que (u_n) est bien définie si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \neq v_k$.

   (c) En étudiant les variations de g sur l'intervalle $]-\infty, 2[$, dont on justifiera qu'il est stable par g, étudier les variations des suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}).

   (d) Déterminer les points fixes de $g \circ g$, et en déduire que (v_n) est convergente. Quelle est la valeur de sa limite ?

2. **Convergence de** (u_n) On suppose dans toute cette question que $a \notin \{v_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, la suite (u_n) est bien définie.

   (a) Déterminer les points fixes de f et de $f \circ f$.

   (b) Étudier les variations de f et montrer que $]1, +\infty[$ est un intervalle stable par f.

   (c) Supposons $a \in]1, +\infty[$. Étudier la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}). En déduire que (u_n) converge, et préciser sa limite.

   (d) Supposons $a \in]-\infty, -5[$. Justifier l'existence de la limite de (u_n), et donner sa valeur.

   (e) Supposons $a \in]\frac{1}{7}, 1[$. Justifier l'existence de la limite de u_n et donner la valeur de sa limite.

   (f) Supposons $a \in]-5, \frac{1}{7}[$, $a \neq -1$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-5, \frac{1}{7}[$. En étudiant le signe de $x \mapsto f \circ f(x) - x$, étudier les variations de (u_{2n}), et aboutir à une contradiction. Que peut-on dire de la limite de (u_n) lorsque $a \in]-5, \frac{1}{7}[$?

   (g) Effectuer une synthèse des résultats précédents.

3. **Étude de la vitesse de convergence de** (u_n) Dans cette question, on pourra admettre le résultat suivant (moyenne de Cesaro) : si une suite (a_n) admet une limite ℓ (finie ou infinie) alors la suite $\left(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

   (a) Justifier qu'il existe une suite (c_k) de réels convergeant vers 4 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(u_n) - 4 = \prod_{k=1}^{n} f'(c_k).$$

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(c_k)| = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

(c) En déduire l'existence d'une suite (w_n) telle que $w_n = o(n)$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{w_n}.$$

(d) En déduire que :

$$\forall r > \frac{2}{3}, \quad |f(u_n) - 4| = o(r^n) \qquad \text{et} \qquad \forall r \in [0, \frac{2}{3}[, \quad r^n = o(|f(u_n) - 4|).$$

4. **Programmation** Écrire un programme en Pascal demandant une valeur de a à l'utilisateur, et affichant le plus petit entier k tel que $u_k > 1$. On convient qu'on renverra -1 si un tel entier n'existe pas.

Exercice 10 – (Oral ESCP 2011)
On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}.$$

1. On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.
   (a) Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
   (d) Montrer que les deux suites $\left(\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.
   (e) Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

   Comparaison asymptotique des suites

   (f) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} - \ell\right| \leqslant \dfrac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.
   (g) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n - \mu b_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.
2. Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :

   $$u_0 = \lambda\alpha_0 - \lambda'\beta_0 \qquad \text{et} \qquad u_1 = \lambda\alpha_1 - \lambda'\beta_1.$$

   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha_n - \lambda'\beta_n$.
   (c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

Exercice 11 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\ln x = \text{Arctan } x + n\pi$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. En donner un équivalent.
3. Montrer que la suite $\left(\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 12 – Étude d'une suite définie par récurrence

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arctan}\, x$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence suivante :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on se ramener à la convergence d'une certaine série). Déterminer cette limite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1 - \frac{\pi}{8}}{2^{n-1}}$.
4. En déduire que $\sum u_n$ converge, et donner un majorant de sa somme.