

Analyse 2 – Révisions : séries

Exercice 1 – Nature des séries de terme général u_n :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $u_n = \frac{\ln n}{n^5}$ | 8. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$ | 15. $u_n = a^{-n^\alpha}, a > 0$ |
| 2. $u_n = e^{-\sqrt{5+n}}$ | 9. $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$ | 16. $u_n = \frac{1}{n^{\ln n} (\ln n)^n}$ |
| 3. $u_n = \frac{n^4 \ln(3n)}{e^{2n}}$ | 10. $u_n = \frac{1}{n^2 + \sin(n^6)}$ | 17. $u_n = \frac{n^n}{n! a^n}, a \neq e, a \neq 0$ |
| 4. $u_n = \ln \left(\frac{3 + \sin \frac{1}{n}}{3 - \sin \frac{1}{n}} \right)$ | 11. $u_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^3 + 1}$ | 18. $u_n = \frac{1}{n} \ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ |
| 5. $u_n = \frac{n + e^{-n}}{(n+1)^3}$ | 12. $u_n = \frac{1}{e^{(2+\frac{3}{n}) \ln n}}$ | 19. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ |
| 6. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$ | 13. $u_n = (-1)^n n e^{-n}$ | 20. $u_n = \ln \left(\cos \frac{1}{n} \right)$ |
| 7. $u_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2 \sqrt{n}}$ | 14. $u_n = \sin n$ | 21. $u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln n$ |

Exercice 2 – Nature et somme éventuelle des séries suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) \cdot \frac{1}{n!}$ | 3. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^2 + 2n - 1) \cdot \frac{1}{2^n}$ | 5. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{4^n}{(2n)!}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$ |
| 2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^3 + 2n^2 - 3n - 1) \cdot \frac{2^n}{n!}$ | 4. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)3^n}$ | 6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \frac{\cos(e^{-(n+1)})}{\cos(e^{-n})}$ |

Exercice 3 – Nature des séries de terme général u_n :

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ | (b) $u_n = (-1)^n e^{\sqrt{6n+5} - n}$ | (c) $u_n = \frac{\ln n + (-1)^n 10 \ln(\ln n)}{\sqrt{n}}$ |
| (d) $u_n = (-1)^n e^{\frac{1}{n}}$ | (e) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$ | (f) $u_n = \ln n \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ |
| (g) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$ | (h) $u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n}$ | (i) $u_n = \frac{(-1)^n \ln n + 1}{n \ln n}$ |
| (j) $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n} - (-1)^n \cdot n}$ | (k) $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx$ | |

Exercice 4 – Nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^6 n} \quad \sum \frac{(-1)^n}{E(n + \sin n)} \quad \sum n - n^2 \sin \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{6} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Exercice 5 –

Déterminer la nature des séries suivantes :

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ | 1. $\sum_{n \geq 0} \ln n e^{-(n+\alpha)^\beta}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ | 1. $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\cos(\frac{1}{n})} - e \right)$ |
| 2. $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\ln n}, a \in \mathbb{R}$ | 2. $\sum_{n \geq 1} \cos^\alpha \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) - 1, \alpha \in \mathbb{R}$ | 2. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ |

Exercice 6 – Nature des séries suivantes, selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sum 5^n z^{2n}$
2. $\sum \frac{1}{n!} z^{n^2}$

Exercice 7 – Montrez que la série $\sum \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{\sqrt{n}}$ diverge (on pourra considérer la somme des termes consécutifs de même signe)

Exercice 8 – On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(4n)!}{4^{4n}(n!)^4}$.

On rappelle que pour toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle, on a $\ln(1 + v_n) = v_n + O(v_n^2)$.

1. Justifier que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2} \ln n$. (On pourra commencer par effectuer un développement limité de $\ln(\frac{u_n}{u_{n-1}})$, puis sommer)
2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 9 – (Oral HEC) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n > 1, u_n = \left(\frac{1}{n} + u_{n-1}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Étudier le signe, la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Donner un équivalent simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \frac{1}{nu_n^2}$.
4. Donner un programme en Pascal permettant de calculer u_n pour n allant de 1 à 50.

Exercice 10 –

1. Déterminer, pour tout $\alpha \in]-\infty, 1]$, un équivalent de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer, pour tout $\alpha \in]1, +\infty[$, un équivalent de $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Indication : on pourra utiliser une comparaison avec une intégrale.

Exercice 11 – Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = x^{k+1} + x^k - n = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$
2. Étudier les variations de x_n (on pourra s'aider du signe de $f_{n+1}(x_n)$ et des variations de f_{n+1})
3. Étudier la limite éventuelle de (x_n) .
4. Justifier que $x_n + 1 \underset{+\infty}{\sim} x_n$ puis que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{k+1}}$.
5. Pour quelles valeurs de k la série de terme général $\frac{1}{x_n}$ est-elle convergente ?
6. Même question pour la série de terme général $\frac{(-1)^n}{x_n}$.

Exercice 12 – (Éricome 2007)

1. À l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque x est au voisinage de 0, on a :

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{\frac{1}{k}} \in]0, 1[.$$

- (b) En déduire le signe de $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
- (c) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$?
- (d) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \quad \text{et} \quad u_n = \exp V_n.$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

3. (a) Montrer que $\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right]$.
- (b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.
- (c) En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$, avec $K > 0$.
Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
4. On pose $S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k$.
- (a) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.
- (b) Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
- (c) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
- (d) Écrire une fonction en Pascal prenant en paramètre un réel e , et donnant une valeur approchée de $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n u_n$ à la marge d'erreur e près.
On pourra justifier que l'erreur faite au rang n est majorée par u_n .

Exercice 13 – (Oral ESCP 2009) Dans tout cet exercice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_k - na_n$.
2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.
- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$.
- (b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.

- (a) Montrer que pour tout n et k de $\mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$.
- (b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Exercice 14 – (ESCP 2010)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$, et g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{h(t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1([0, \pi])$.
2. Déterminer une constante C telle que pour tout entier $n \geq 0$, pour tout réel t de $]0, \pi]$:

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} + C.$$

3. Montrer que pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0.$$

Soit la fonction ζ définie par : $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

4. Déterminer le domaine de définition de la fonction ζ .
5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_k = \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt$.
6. Dédire des questions précédentes que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 15 – Déterminer la nature des séries ci-dessous. On précisera les cas de convergence absolue, semi-convergence ou divergence grossière.

$$(a) \sum \frac{\ln(\ln n)}{n^{-\frac{1}{2}}} \quad (b) \sum \frac{\ln(\ln n)}{n} \quad (c) \sum \frac{\ln(\ln n)}{n^2} \quad (d) \sum \frac{(-1)^n \ln(\ln n)}{n}$$

Exercice 16 – (Oral ESCP 2011)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On considère les deux suites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{nu_n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^2 u_n} \left(\sum_{k=1}^n k u_k \right).$$

1. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = n^\alpha$, où α est un réel strictement positif.
 - (a) À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$, dans n tend vers $+\infty$.
 - (b) Vérifier que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
 - (c) Montrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. On suppose dans cette question que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel a strictement positif et on admet le résultat suivant :

« Si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites réelles positives telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et $\sum_n a_n$ diverge, alors

$$\sum_{k=1}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n b_k. \text{ »}$$

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que la série de terme général u_n est divergente.
- (b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n k u_k = (n+1) S_n - \sum_{k=1}^n S_k.$$

- (c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $w_n = \frac{n+1}{n} v_n - \frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k$.
- (d) En utilisant le résultat admis, montrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$w_n = a - a w_n + o(w_n).$$

- (e) En déduire, en fonction de a , la limite de la suite $(w_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 17 – Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$, et soit (S_n) la somme partielle de la série de terme général (u_n) .

1. Soit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $v_p = S_{(p+1)^2-1} - S_{p^2-1}$.
 - (a) Déterminer le signe de v_p , ainsi que sa limite.
 - (b) Déterminer le signe de $|v_{p+1}| - |v_p|$ pour p assez grand.
 - (c) En déduire la convergence de $\sum v_n$, et montrer que (S_{p^2-1}) admet une limite finie ℓ
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\min(S_{E(\sqrt{n})^2-1}, S_{(E(\sqrt{n})+1)^2-1}) \leq S_n \leq \max(S_{E(\sqrt{n})^2-1}, S_{(E(\sqrt{n})+1)^2-1}).$$

3. En déduire que la série de terme général u_n converge