Analyse 3 – Intégrales impropres (1)

Exercice 1 – Étudier la nature et, en cas de convergence, calculer la valeur des intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$
7. $I_7 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$
8. $I_8 = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t (\ln \ln t)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 – Soit $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(nt)}{(t^2+t+1)^n} \,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et calculer sa limite.

Exercice 3 –

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{2+x^3}\right)^n \mathrm{d}x$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est bien définie, et que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0
   Indication : on pourra utiliser la relation de Chasles, en coupant l'intégrale en deux en $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Même question avec $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^5+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 – Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant \alpha$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x$ diverge.

Exercice 5 – Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x \ln x \mathrm{e}^{-x^\alpha} \,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)|}} \,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\ln(\ln x)}} \,\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \mathrm{d}x$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x$
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x+1) - \ln x) \,\mathrm{d}x$
9. $I_9 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x^2+1) - \ln x^2 \,\mathrm{d}x$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{|\ln x|}}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{2x}} \,\mathrm{d}x$
11. $I_{11} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{|\ln x|\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$
12. $I_{12} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)} \,\mathrm{d}x$
13. $I_{13} = \displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}) \,\mathrm{d}x$
14. $I_{14} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) \mathrm{d}x$
15. $I_{15} = \displaystyle\int_3^{+\infty} (\ln(\ln x))^{-\ln x} \,\mathrm{d}x$
16. $I_{16} = \displaystyle\int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 – Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(\ln t)\ \mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t^2\ \mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left((x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}\right)\ \mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^{\ln x}}$
6. $I_6 = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln\ln x)^{\ln x}}$
7. $I_7 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\cos\frac{1}{x}}}$
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
9. $I_9 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}\ \mathrm{d}x$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{sh}\sqrt{\ln x}\right)^{-2}\ \mathrm{d}x$
11. $I_{11} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+|\sin x|}$
12. $I_{12} = \displaystyle\int_0^{1} \frac{x^a - \mathrm{Arctan}\, x^a}{x^b - \mathrm{Arctan}(x^b(1+x^b))}\ \mathrm{d}x$, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
13. $I_{13} = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin x|^x\ \mathrm{d}x$
14. $I_{14} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\sin x)\ \mathrm{d}x$
15. $I_{15} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3\sin^2 x}$
16. $I_{16} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{e}^x)\ \mathrm{d}x$
17. $I_{17} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$
18. $I_{18} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \sin x^8\ \mathrm{d}x$
19. $I_{19} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\ \mathrm{d}x$
20. $I_{20} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\ \mathrm{d}x$
21. $I_{21} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln x)^2}\ \mathrm{d}x$
22. $I_{22} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin x \ln x\ \mathrm{d}x$
23. $I_{23} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$, $a \in \mathbb{Z}$.
24. $I_{24} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 7 – Nature et valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}}\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t\ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{1} t^\alpha \ln t\ \mathrm{d}t$, $\alpha > -1$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\ \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

Exercice 8 –

1. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n converge.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.
   (c) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 9 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$. Convergence de I_n, et valeur.

Exercice 10 – **Comparaison par équivalences : un contre-exemple**

1. Montrer que $\displaystyle\frac{\sin t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln t}\right)$
2. Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$ converge.
3. (a) Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[\pi, +\infty[$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t \ln t}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t \ln t}\, \mathrm{d}t$ diverge, puis que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\left(1 + \frac{\sin t}{\ln t}\right) \mathrm{d}t$ diverge.

4. Conclure.

Exercice 11 – Limite sous le signe somme : un contre-exemple
Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée.

1. Justifier l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x$.
2. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0)$.
4. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}$.
5. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)$ converge et donner sa valeur.
6. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x$?

Exercice 12 – Soit n un entier positif ou nul, et $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$.
On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction f_t sur $\mathbb{R}$ par $f_t(x) = \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Domaine de définition de F_n ?
2. On suppose dorénavant que $x > 0$. Soit h un réel non nul tel que $|h| < \frac{x}{2}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit M un majorant de f_t'' sur $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$). Justifier que :
   $$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \cdot M.$$
   (b) Calculer f_t', f_t''.
   (c) Montrer que pour tout y entre x et $x+h$, on a $|f_t''(y)| \leqslant \dfrac{2n(t^2+4(2n+3)x^2)}{(t^2+\frac{x^2}{4})^{n+2}}$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2n(t^2+4(2n+3)x^2)}{(t^2+\frac{x^2}{4})^{n+2}}\, \mathrm{d}t$ converge
   (e) En déduire que F_n est dérivable en x et que
   $$F_n'(x) = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}} = -2nxF_{n+1}(x)$$
3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_1(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n} = \binom{2n-2}{n-1} \frac{\pi}{(2x)^{2n-1}}.$$

Exercice 13 – Après avoir justifié leur convergence, calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2 - t + 3)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{ch}^3 t\mathrm{e}^{-\mathrm{sh}t}\ \mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\sqrt{t}\mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} (t + t^4)\mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t + t^2 + \sqrt{|t|})\mathrm{e}^{-|t|}\ \mathrm{d}t$
7. $I_7 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-3)^2}\ \mathrm{d}x$
8. $I_8 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+4x-5}\ \mathrm{d}x$
9. $I_9 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x^2-2x+3}\ \mathrm{d}x$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$
11. $I_{11} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^4\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$
12. $I_{12} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+4x+6}\ \mathrm{d}x$

Exercice 14 – Justifier la dérivabilité des fonctions suivantes définies sur un domaine à préciser, et exprimer leur dérivée sous forme d'une intégrale (on pourra commencer par utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intégrande, vue comme fonction en x, à t fixé).

1. $f_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$
2. $f_2 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}\ \mathrm{d}t$
3. $f_3 : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$
4. $f_4 : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$
5. $f_5 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$

Exercice 15 – Nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + \mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} x^{-x/(x+1)}\ \mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln x)^2}\ \mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin x \ln x\ \mathrm{d}x.$$

Pour cette dernière intégrale, s'inspirer de l'étude de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 16 – Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(|x|+1)^3} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x.$$

Exercice 17 – Déterminer la nature et le cas échéant la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 18 – Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}\right)\ \mathrm{d}x$

Exercice 19 –
Soit $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{Arctan}\,x\ \mathrm{d}x$.

1. Pour quelles valeurs de a, $I(a)$ est-elle convergente ?
2. Soit a tel que $I(a)$ converge. Montrer que : $I(a) = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2}{a^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x$.
3. Montrer que $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$;en déduire que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x = 0$.
4. Déterminer un équivalent simple de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.