Analyse 4 – Intégrales impropres (2)

Exercice 1 – (Étude de la fonction Γ)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t$.
   En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geqslant 2^{x-1}\displaystyle\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.
   En déduire la limite de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_t(x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

3. Montrer que f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer f_t' et f_t''.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leqslant \min\left(\frac{x}{2}, 1\right)$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{h}{2}M_2(t,x),$$
   où $M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^x & \text{si } t \geqslant 1 \\ (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^{\frac{x}{2}-1} & \text{si } t < 1. \end{cases}$
   (b) Justifier la convergence des intégrales
   $$\int_0^1 (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^{\frac{x}{2}-1}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^x\ \mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t.$$
5. Montrer que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 – (d'après EDHEC 1994)

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :
$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}t^n\ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
2. (a) Calculer I_0
   (b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
   (c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.
3. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$
   (b) En déduire que :
   $$\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant KI_{2n+1},$$
   K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.
   (c) En déduire : $I = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in [0,1],\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \mathrm{Arctan}(x) \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

(c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α, utilisant la fonction Arctan.

Exercice 3 – (Intégrale de Gauss)

L'objet de cet exercice est de démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Pour tout $t \in [0,1]$, on note f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_t(x) = \mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}$.
   Calculer f_t' et f_t'', et montrer que : $\forall x \geqslant 0, \ \forall t \in [0,1], \ |f_t''(x)| \leqslant 4(4x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 16 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)} \, \mathrm{d}t$.
   En utilisant une formule de Taylor pour la fonction f_t, montrer que pour tout x,
   $$\left| \frac{g(x+u)-g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} f_t'(x) \, \mathrm{d}t \right|$$
   tend vers 0 lorsque u tend vers 0.
   Qu'en déduit-on sur la dérivabilité de g ?
3. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \right)^2$.
   (a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \geqslant 0$, $h'(x) + g'(x) = 0$.
   (b) En déduire la valeur de $h(x) + g(x)$.
4. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4 – (d'après EDHEC 2004)

1. On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$. Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Calculer $f(1)$.
4. (a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0,+\infty[$ par
   $$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}.$$
   (b) Pour tout x de $]0,+\infty[$ et pour tout t de $[1,+\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln 2}{x},$$
   puis déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}.$$
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+, ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. (question ajoutée) Soit, pour tout $t \in [1,+\infty[$, la fonction g_t définie par :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g_t(x) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}.$$

(a) Montrer que pour tout $t \geqslant 1$, g_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1,+\infty[$, et déterminer g_t' et g_t''.

(b) Soit $x > 0$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leqslant \frac{x}{2}$. Montrer que pour tout $t \in [1,+\infty[$, et tout y dans $[x-|h|, x+|h|]$, on a :

$$|g_t''(y)| \leqslant \frac{\ln^2(t)}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}.$$

(c) En déduire que

$$\left|\frac{g_t(x+h)-g_t(x)}{h} - g_t'(x)\right| \leqslant \frac{h\ln^2 t}{2(1+t+t^{\frac{x}{2}+1})}.$$

(d) En étudiant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}\ \mathrm{d}t$, en déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad f'(x) = \int_1^{+\infty} g_t'(x)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 5 – (ESCP 2010)

1. Montrer que, pour tout réel y, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\ \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\ \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\ \mathrm{d}x$$

sont convergentes.

On définit ainsi une fonction F qui a tout réel y, associe le nombre :

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\ \mathrm{d}x.$$

2. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que : $\forall p,q \in \mathbb{R},\quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

3. (a) Établir, pour tout réel x, l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$.
   (b) En éduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Montrer que : $\forall a,b \in \mathbb{R},\quad |\cos(a+b) - \cos a + b\sin a| \leqslant \dfrac{b^2}{2}$.
   (b) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel y, la dérivée F' de F est donnée par :

$$F'(y) = -2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\ \mathrm{d}x.$$

   (c) En déduire que pour tout réel y, $F'(y) = -2yF(y)$.
   (d) Montrer que pour tout réel y, $F(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-y^2}$.

Exercice 6 – Soit s une fonction continue, périodique de période $T > 0$, telle que $\displaystyle\int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

1. Montrer que toute primitive S de s est T-périodique, et bornée.
2. En déduire que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, décroissante de limite nulle, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} s(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 7 – Transformée de Laplace

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, telle qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel positif k tels que pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $f(t) \leqslant kt^n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}f(t)\ \mathrm{d}t$. On notera $L(f)(x)$ sa valeur.
2. Soit x_0 un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel $x > \frac{x_0}{2}$, et tout réel $t \geqslant 0$, on a l'inégalité :

$$\left|\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-tx_0} + t(x-x_0)\mathrm{e}^{-tx_0}\right| \leqslant t^2\frac{(x-x_0)^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{tx_0}{2}}.$$

3. En déduire que la fonction $L(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x > 0,\ [L(f)]'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \cdot tf(t).$$

Exercice 8 – Pour tout réels x et y, on pose

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de B.
   (b) Justifier que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y) = B(y,x)$.
   (c) Déterminer une relation entre $B(x+1,y)$ et $B(x,y+1)$. En déduire que

   $$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

   (d) Calculer $B(n+1,y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $1 - t \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :

   $$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a :

   $$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

   On distinguera les cas $t \in [0,\sqrt{n}]$ et $t \in [\sqrt{n}, n]$, ou alors, on étudiera la convexité de $x \mapsto (1-x)^n$.
   (c) Des questions a et b, déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t$, pour $x > 0$. Conclure que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

   (d) Exprimer $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ en fonction de $B(n+1,x)$. En déduire que

   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

3. (a) Montrer que quand l'entier n tend vers $+\infty$, on a

   $$B(n+1,y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$$

   (b) En déduire que $B(x,y) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma(y)}{x^y}$.
   (c) Montrer que, pour tous réels x et y strictement positifs,

   $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

   On pourra utiliser le résultat de la question 2 pour montrer que

   $$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{B(x+n,y)n^y}{B(x,y)}.$$