Analyse 5 – Fonctions de plusieurs variables (1)

Exercice 1 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $F = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}$.

Exercice 2 – Soit f la fonction définie par : $f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geqslant y^2 \\ \dfrac{2x}{y} & \text{si } |x| \leqslant y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leqslant -y^2. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il n'existe aucun $(A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, x', y) \in]-\alpha, \alpha[\times]-\alpha, \alpha[\times]-\beta, \beta[, \quad |f(x, y) - f(x', y)| \leqslant A|x - x'|.$$

Exercice 3 – Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f_{x,y} \ : \ [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$, et on note :

$$F(x, y) = \sup_{t \in [-1,1]} f_{x,y}(t).$$

1. Montrer que $F(x, y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{4x} & \text{si } x < 0 \text{ et } |y| \leqslant -2x \\ x + |y| & \text{sinon.} \end{cases}$.
2. Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

Le but de l'exercice est de montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la limite de g lorsque (x, y) tend vers (x_0, x_0), avec $x \neq y$, est $f'(x_0)$ (ind. : TAF).
   En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, exprimer $\dfrac{g(x_0 + h, x_0) - g(x_0, x_0)}{h}$ en fonction de f.
   Déterminer la limite de cette expression à l'aide d'une formule du cours.
3. Pour $x \neq y$ calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ en fonction de (x, y), et déterminer sa limite.
   En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 – Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe Ω non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que, pour tout $X \in \Omega$, $\nabla f_X = 0$. Montrer que f est constante.
2. On suppose que l'application $X \mapsto \nabla f_X$ est constante sur Ω et que. Montrer que f est affine sur Ω, c'est-à-dire qu'il existe un réel b tel $f - b$ soit sur Ω la restriction d'une forme linéaire (on pourra utiliser une formule de Taylor centrée en un point $a \in \Omega$)
   Que vaut b lorsque $0 \in \Omega$?

Exercice 6 – Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On pose $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$. Montrer que si $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u.$$

Exercice 7 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont-elles continues ?

Exercice 8 – Plan tangent en $(0,0)$ des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité) :

1. $f(x,y) = 1 + x - \sqrt{1+x-y}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x+\ln(1+y)}}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos(x+y)}}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y) - \sin x - \sin y}{xy}$.

Exercice 9 – On se propose de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que la fonction G définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $G(x,y,z) = f\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$ ait un laplacien nul sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, le laplacien de G étant la fonction définie là où cela est possible par

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}.$$

1. Soit f une solution du problème, montrer alors que la fonction $u \mapsto u\sqrt{1+u}f'(u)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$
En déduire, pour tout $y > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_3^y \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$.
3. Conclure.

Exercice 10 – Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On pose $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.
On note F la fonction définie sur Ω par : $F(x,y) = f\left(x + \dfrac{1}{y}\right) + g\left(x - \dfrac{1}{y}\right)$.

1. Montrer que Ω est un ouvert.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et que ses dérivées partielles vérifie l'équation (E) suivante :
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y^4 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2y^3 \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$
3. Réciproquement, soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω solution de (E).
On pose $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$.
On définit sur U la fonction G par : $G(u,v) = F\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{2}{u-v}\right)$.
   (a) Justifier que U est un ouvert.
   (b) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et que $\dfrac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} = 0$.
   (c) En déduire l'existence de deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad F(x,y) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + g\left(x - \frac{1}{y}\right).$$

Exercice 11 – (fonctions homogènes)

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est positivement homogène de deghré α si :
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0, \quad f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n).$$
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Montrer que si f est positivement homogène de degré α, ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.

(b) Montrer que si f est positivement homogène de degré α, on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

(c) On suppose réciproquement que f vérifie la relation de la question précédente. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi : t \mapsto f(tx_1, \dots, tx_n)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

En déduire que f est positivement homogène de degré α.

2. On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}. \quad (*)$$

(a) Déterminer une solution positivement homogène f_0 de $(*)$.

(b) Montrer que f est solution de $(*)$ si et seulement si $g = f - f_0$ vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

En déduire que g doit être constante.

(c) Conclure.

Exercice 12 – On se propose de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0. \qquad (1)$$

1. Soit f solution de (1). Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x + y, x - y).$$

(a) Montrer que cela définit une unique fonction g.

(b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer en tout point (x, y) la valeur de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fontion des dérivées partielles de g.

2. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 13 – (Oral HEC 2011)

1. Question de cours : Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$). Donner un exemple d'une fonction non continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y - x} \displaystyle\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t & \text{si } x \neq y \\ f(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

2. Exemple

Dans cette question seulement, on suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$.

Déterminer la fonction g correspondante, et montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer ses dérivées partielles du premier ordre sur D.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles du premier ordre en (a,a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$, où f' désigne la dérivée de f.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in D$.

   (a) Montrer que :
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\left(f'(t)-f'(a)\right)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire que : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\sup\{|f'(t)-f'(a)|, t \in S\}$, où S désigne le segment d'extrémités x et y.

6. Déduire des questions précédentes qur g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.