**Analyse 6 – Fonctions de plusieurs variables (2) Optimisation**

**Exercice 1** – Étudier les extrema globaux des fonctions suivantes, définies sur $D$ :

1. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \ln(x^2 + y^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $D = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = \mathrm{Arctan}((x + y + z)\mathrm{e}^{-(x+y+z)})$
3. $D = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \frac{2+x-y^2}{1-x+y^2}$
4. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x - 6y + 2$
5. $D = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2yz + z^2 + 1$
6. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = -x^2 - 2xy - 3y^2 - 4$

**Exercice 2** – Étudier les extrema (locaux sur l'intérieur, et globaux) des fonctions suivantes, définies sur $D$ :

1. $D = \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.
2. $D = ]0, \pi[^2$, $f : (x, y) \mapsto \sin x + \sin y + \cos(x + y)$
3. $D = \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto (x + z^2)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$.
4. $D = [0, 1]^2$, $f : (x, y) \mapsto x^3 - 2x^2y + y^2$
5. $D$ est le triangle (fermé) de sommets $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $f : (x, y) \mapsto 3x^3 - x^2 + 2xy + xy^2$.
6. $D = [-1, 1]^3$, $f : (x, y, z) \mapsto x^n + y^n + z^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
7. $D = [0, 1]^3$, $f : (x, y, z) \mapsto xy^2 + x^2y - 2zy^2 - x + 1$.

**Exercice 3** – Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et déterminer son gradient.
2. Déterminer les points critiques de $f$.
3. Déterminer la hessienne de $f$ en tout point $(x, y)$.
4. Montrer que la forme quadratique associée $q_{(0,0)}$ au point $(0, 0)$ est positive.
5. La fonction $f$ admet-elle un extremum en $(0, 0)$ ?

**Exercice 4** – Soit $g$ définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $g(x, y) = x \ln y - y \ln x$.

1. Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer le gradient et la hessienne de $g$ en tout point.
3. Étudier l'existence d'extremums locaux ou globaux de $g$.

**Exercice 5** – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xy + yz + zx - xyz$.

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, puis déterminer les points critiques de $f$
2. Déterminer la hessienne de $f$ en tout point $X$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Étudier les éventuels extremums de $f$.

**Exercice 6** – Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = yz\mathrm{e}^x + zx\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^z$.

1. Montrer que $(0, 0, 0)$ est point critique de $f$, et que tout autre point critique vérifie $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^*)^3$
2. Soit $(x, y, z)$ un pouint critique de $f$, différent de $(0, 0, 0)$ et $g : u \mapsto \frac{1-u}{u}\mathrm{e}^u$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que $g(x) = g(y) = g(z)$. Étudier les variations de $g$.
   (b) Montrer que si $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_-^*)^3$, alors $x = y = z$ et déterminer le ou les points critiques de $f$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
   (c) Montrer que si $x > 0$, alors $y < 0$ et $z < 0$, puis $y = z$ et enfin que $x = \frac{2}{y+1}$. En déduire que $y \in ]-1, 0[$

(d) En étudiant les variations sur $]-1,0[$ de la fonction $h : y \mapsto y\mathrm{e}^{\frac{2}{1+y}} + 2\mathrm{e}^{y}$, montrer qu'il existe un unique point critique $C_1 = (x_1, y_1, z_1)$ tel que $x_1 > 0$

3. En déduire que les points critiques de $f$ sont $(0,0,0)$, $(-2,-2,-2)$ et trois autres points $C_1$, $C_2$ et $C_3$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
4. Étudier le signe de $f(x, y, 0)$. La fonction $f$ admet-elle un minimum en $(0,0,0)$ ?
5. Montrer que quand $h$ tend vers 0, on a :

$$f(-2+h,-2+h,-2+h) = f(-2,-2,-2) - 3\mathrm{e}^{-2}h^2 + o(h^2)$$

$$\text{et} \qquad f(-2+h,-2,-2) = f(-2,-2,-2) + 2\mathrm{e}^{-2}h^2 + o(h^2).$$

La fonction $f$ admet-elle un extremum en $(-2,-2,-2)$ ?

6. Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x,y,z)$ en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. La fonction $f$ admet-elle un extremum local en $C_1$, $C_2$ et $C_3$ ?

**Exercice 7** – Soit $f$ la fonction définie sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - \ln x - \ln y.$$

1. Justifier que l'équation $z\mathrm{e}^z = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f$ admet sur $D$ un unique point critique $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et que $a$ et $b$ vérifient $a = b$. On ne demande pas de déterminer $a$ et $b$.
3. Déterminer la hessienne $\nabla^2 f(x,y)$ en tout $(x,y) \in D$, et déterminer, pour tout $(x,y) \in D$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, le signe de la forme quadratique associée au point $(x,y)$, évaluée en $(u,v)$, c'est-à-dire $q_{(x,y)}(u,v)$.
4. Justifier que la courbe de $f$ présente au point $A$ un minimum global.

**Exercice 8** – (d'après INSEEC 2001) Le but de cet exercice est l'étude d'un extremum particulier de la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3-4)$.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $M$.
   (b) Calculer une base orthonormale de vecteurs propres de $M$.
2. Montrer que $a = (1,1,1)$ est le seul élément de $\mathbb{R}^3$ dont les termes sont non nuls et pour lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$ sont nulles.
3. On pose : $\forall h \in \mathbb{R}^3,\ h = (h_1,h_2,h_3),\quad Q(h) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_ih_j$, et $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $Q(h) = {}^tHMH$, où $M$ est la matrice étudiée dans la question 1.
   (b) Justifier qu'il existe une matrice inversible $P$, que l'on ne calculera pas, telle que $M = PD\,{}^tP$, où $D$ est une matrice diagonale que l'on précisera.
   (c) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = {}^tPH$. Exprimer $Q(h)$ en fonction de $y_1$, $y_2$ et $y_3$, et des valeurs propres de $M$. En déduire que $f$ a un extremum local en $a$ dont on précisera la nature (maximum ou minimum)
4. En utilisant le développement de $(h_1+h_2+h_3)^2$, montrer que l'on peut écrire directement $Q(h)$ comme somme de carrés et conclure que $f$ a un extremum en $a$ sans untiliser les questions 3(b) et 3(c).
5. Étudier de même l'unique point critique dont les coordonnées sont toutes non nulles de la fonction de $n$ variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1\ldots x_n(x_1+\cdots+x_n-n-1).$$

**Exercice 9** – *Dans cet exercice, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction de $n$ variables réelles, notée $f$, définie par :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. (a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Calculer les dérivées premières et secondes de $f$.
2. (a) Déterminer le seul point critique $(a_1, \dots, a_n)$ de $f$ sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Vérifier que la hessienne de $f$ en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où $I_n$ désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $J_n$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
3. (a) Déterminer le rang de $J_n$. En déduire que 0 est valeur propre de $J_n$, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   (b) Calculer le produit $J_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de $J_n$, puis celles de $A_n$.
4. (a) Montrer que pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ no nul, on a ${}^tHA_nH > 0$.
   (b) En déduire que $f$ admet un minimum local en $(a_1, \dots, a_n)$, et que ce minimum est égal à $-\frac{n}{4(n+1)}$.

**Exercice 10** – Soit $f : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$, $s \in \mathbb{R}_+^*$, et $\mathcal{C}$ le plan d'équation $g(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = s$.

1. Déterminer les extremums de $f$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.
2. En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.$

**Exercice 11** – Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2, et $f$ la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^4.$$

1. Déterminer l'unique point critique de $f$ sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$.
2. Justifier, à l'aide d'une formule de Taylor, qu'il s'agit de l'unique minimum de $f$ sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$.

**Exercice 12** – L'objet de cet exercice est d'étudier les extrema de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = x\mathrm{e}^{y+z} + y\mathrm{e}^{x+z} + z\mathrm{e}^{x+y}.$$

1. **Étude de deux fonctions auxiliaires**
   (a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
      i. Étudier les variations de $g$. On tracera le tableau de variations de $g$, en indiquant les limites et les extrema, ainsi que les valeurs annulant $g$.
      ii. Justifier que $g$ se restreint en une injection sur $]-\infty, 2]$.
   (b) Soit $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, définie par $h(x) = x\mathrm{e}^{1-x} + (1-x)\mathrm{e}^{x}$.
      i. Étudier les variations de $h'$ sur $[0, 1]$.
      ii. En déduire que $h'$ s'annule sur $[0, 1]$ en une unique valeur $\alpha$ que l'on déterminera.
      iii. Étudier les variations de $h$, et déterminer son maximum et son minimum sur $[0, 1]$, ainsi que l'ensemble des points en lesquels ils sont atteints.

2. **Étude des extrema locaux**
   (a) Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer le gradient de $f$ en tout point de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Soit $A = (x, y, z)$ un point critique de $f$.
      i. Montrer que $g(x) = g(y) = g(z)$, où $g$ est la fonction introduite dans la question 1.
      ii. Montrer que si $x > 2$, alors $y > 1$ et $z > 1$, et aboutir à une contradiction.
      iii. En déduire que $x = y = z$, puis justifier que $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est l'unique point critique de $f$.
   (d) Calculer la hessienne de $f$ au point $A$, et déterminer ses valeurs propres.
   (e) La fonction $f$ admet-elle un extremum local en $A$ ? La fonction $f$ admet-elle un maximum ou un minimum sur $\mathbb{R}^3$ ?
3. **Étude d'une restriction**
   Soit $\mathcal{C}$ la contrainte $x + y + z = 1$.
   (a) Montrer que si $B = (x, y, z)$ est point critique de $f$ sous la contrainte $\mathcal{C}$, alors $g(x) = g(y) = g(z)$.
   (b) En s'inspirant de la question 2, en déduire que $f$ admet un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$, et déterminer ce point critique.
   (c) Soit $D = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y + z = 1\}$. Justifier que $f$ admet un minimum et un maximum sur $D$, et les déterminer, ainsi que l'ensemble des points en lesquels ils sont atteints. On pourra pour cela utiliser la fonction $h$ introduite en question 1.

**Exercice 13** – Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Arctan} x_i$.

1. La fonction $f$ admet-elle un extremum local ou global sur $\mathbb{R}^2$ ?
2. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + \cdots + x_n = s\}$.
   (a) Montrer que $f$ admet un maximum sur $D$.
   (b) Montrer que $f$ admet dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$ un unique point critique $A$ sous la contrainte $\mathcal{C} : x_1 + \cdots + x_n = s$.
   (c) Calculer la hessienne de $f$ en tout point de $\mathbb{R}^2$, et en déduire que la restriction de $f$ à $D$ admet en $A$ un maximum global.
   (d) Quel est le maximum de $f$ sur $T = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leqslant s\}$ ?

**Exercice 14** – **(ESCP 2009)** Soit $f : D = (R_+^*)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z).$$

1. La fonction $f$ est-elle minorée, majorée, bornée sur $D$ ?
2. Justifier que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

*Soit $a$ un réel strictement positif. On considère l'ensemble*

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 3a\},$$

*et on note $g = f|_{\mathcal{C}_a}$ la restriction de $f$ à $\mathcal{C}_a$.*

3. Montrer que si $g$ admet un extremum local au point $(x, y, z)$, alors :

$$1 + \ln(x) = 1 + \ln(y) = 1 + \ln(z).$$

4. Étudier l'existence des extremums locaux de $g$. Comparer la (les) valeur(s) obtenue(s) à celle(s) trouvée(s) à la première question.
5. Retrouver les extremums de g en se ramenant à l'étude des extremums d'une fonction de deux variables bien choisie.