

Algèbre 1 – Révisions d'algèbre linéaire

Correction de l'exercice 2 –

Tout d'abord, supposons que $p+q$ soit un projecteur. Alors $(p+q)^2 = p+q$, soit $p^2 + pq + qp + q^2 = p+q$ (attention, *a priori*, $pq \neq qp$, la composition n'étant pas commutative). Comme $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on obtient $pq + qp = 0$.

On compose cette égalité par pq à gauche et q à droite : $0 = pqpq^2 + pq^2pq = 2pqpq$. Ainsi, $pqpq = 0$

On compose l'égalité $pq + qp = 0$ par p à gauche et q à droite : $0 = pqpq + q^2p^2 = pqpq + qp = qp$.

Par conséquent, $qp = 0$, puis $pq = -qp = 0$.

Réciproquement, si $pq = qp = 0$, alors

$$(p+q)^2 = p^2 + q^2 + pq + qp = p^2 + q^2 = p+q,$$

et $p+q$ est donc un projecteur.

Correction de l'exercice 4 – Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- Montrons que la somme $\text{Ker}(g) + (\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g))$ est directe. Cela provient du fait que, puisque g est un projecteur, $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont en somme directe (ils sont supplémentaires dans E). Ainsi

$$\{0\} \subset \text{Ker}(g) \cap \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) = \{0\}.$$

Ainsi, par double-inclusion, $\text{Ker}(g) \cap \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, donc $\boxed{\text{Ker}(g) \oplus (\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)) \text{ est directe}}$

- Soit $x \in \text{Ker}(f \circ g)$. Alors $f \circ g(x) = 0$. Comme $E = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g)$, il existe $x_1 \in \text{Ker}(g)$ et $x_2 \in \text{Im}(g)$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a alors

$$0 = f \circ g(x) = f \circ g(x_1) + f \circ g(x_2).$$

Or, $x_1 \in \text{Ker}(g)$, donc $f \circ g(x_1) = 0$, et $x_2 \in \text{Im}(g)$, et g étant un projecteur, $g(x_2) = x_2$. Donc la relation précédente se réécrit $0 = f(x_2)$, et par conséquent $x_2 \in \text{Ker}(f)$.

On a donc $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \text{Ker}(g)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)$. Ainsi $x \in \text{Ker}(g) \oplus (\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g))$.

On obtient donc l'inclusion $\boxed{\text{Ker}(f \circ g) \subset \text{Ker}(g) \oplus (\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g))}$.

- Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(g)$, alors $f \circ g(x) = f(0) = 0$, donc $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$. Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)$. Alors, comme g est un projecteur, $g(x) = x$, donc $0 = f(x) = f \circ g(x)$, donc $x \in \text{Ker}(f \circ g)$. Par conséquent, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$. Ces deux inclusions amènent $\text{Ker}(g) \oplus (\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)) \subset \text{Ker}(f \circ g)$.

Les deux inclusions amènent l'égalité.

- Soit $x \in \text{Im}(f \circ g)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(g(y))$, donc $x \in \text{Im}(f)$. De plus, $x = x - g(y) + g(y)$, et $f(x - g(y)) = f(x) - f \circ g(y) = x - x = 0$, car $f(x) = x$, puisque $x \in \text{Im}(f)$, et f est un projecteur. Ainsi, $x \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(g)$. Donc $x \in \text{Im}(f) \cap (\text{Ker}(f) + \text{Im}(g))$
- Réciproquement, si $x \in \text{Im}(f) \cap (\text{Ker}(f) + \text{Im}(g))$, alors il existe $y \in E$, $z \in E$, et $t \in \text{Ker}(f)$ tels que $x = f(y) = t + g(z)$. Alors

$$x = f(y) = f \circ f(y) = f(t) + f \circ g(z) = f \circ g(z),$$

donc $x \in \text{Im}(f \circ g)$.

- On a $(\text{id} - g)^2 = \text{id} + g^2 - 2g = \text{id} + g - 2g = \text{id} - g$, donc $\text{id} - g$ est un projecteur.
- Si p est un projecteur, $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{id} - p)$, car $x \in \text{Im}(p)$ si et seulement si $p(x) = x$. En appliquant cela à $\text{id} - g$ et à g , il vient :

$$\text{Im}(\text{id} - g) = \text{Ker}(\text{id} - (\text{id} - g)) = \text{Ker}(g) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g) = \text{Ker}(\text{id} - g).$$

- On suppose que f et g sont deux projecteurs de E .

- Si $f \circ g$ est un projecteur également, alors $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Ker}(f \circ (\text{id} - g))$. En effet, soit $x \in \text{Im}(f \circ g)$. Alors, comme $f \circ g$ est un projecteur, $x = f \circ g(x)$, et donc

$$f(x) = f^2 \circ g(x) = f \circ g(x) \quad \text{soit:} \quad f(x - g(x)) = 0 \quad \text{soit:} \quad f \circ (\text{id} - g)(x) = 0.$$

Ainsi, $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Ker}(f \circ (\text{id} - g))$, et d'après la description donnée pour ces espaces, du fait que f , g et $\text{id} - g$ sont des projecteurs,

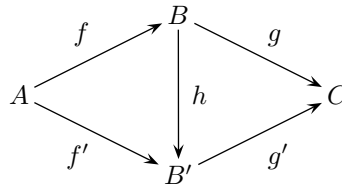
$$\text{Im}(f) \cap (\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)) \subset \text{Ker}(\text{Id} - g) \oplus (\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(\text{id} - g)) = \text{Im}(g) \oplus (\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)).$$

- Réciproquement, si cette inclusion est vérifiée, donc si $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Ker}(f \circ (\text{id} - g))$, soit $x \in E$. Alors

$$(f \circ (\text{id} - g))(f \circ g)(x) = 0 \quad \text{soit:} \quad f^2 \circ g(x) - (f \circ g)^2(x) = 0 \quad \text{soit:} \quad f \circ g(x) = (f \circ g)^2(x).$$

Ceci étant vrai pour tout x , $f \circ g$ est un projecteur.

Correction de l'exercice 8 – Soit A , B , C et B' quatre espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit f , g , f' , g' et h des applications linéaires telles que ci-dessous :



On suppose en outre que :

- $h \circ f = f'$ et $g' \circ h = g$,
- f et f' sont injectives, g et g' sont surjectives,
- $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f') = \text{Ker}(g')$.

1. Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in \text{Im}(f)$, et comme $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$, on obtient $f(a) \in \text{Ker}(g)$. Ainsi, $g(f(a)) = 0$. De même, puisque $\text{Im}(f') = \text{Ker}(g')$, $g' \circ f'(a) = 0$.

2. Étude de l'injectivité de h

- (a) Soit $b \in B$ tel que $h(b) = 0$. Ainsi, g' étant linéaire,

$$g' \circ h(b) = g'(0) = 0.$$

Or, par hypothèse $g' \circ h = g$, donc $g(b) = 0$.

- (b) On en déduit que $b \in \text{Ker}(g)$, donc, puisque $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$, on a $b \in \text{Im}(f)$, et donc, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$.
- (c) On a alors $f'(a) = h \circ f(a) = h(b) = 0$. Par conséquent, $a \in \text{Ker}(f')$, et comme f' est injective, $\text{Ker}(f') = \{0\}$. Ainsi, $a = 0$. On en déduit que $b = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(h) = \{0\}$, et par conséquent, h est injective.

3. Étude de la surjectivité de h .

- (a) L'application g est surjective, donc $g'(b')$ dans C admet une image réciproque par g . Il existe donc $b \in B$ tel que $g(b) = g'(b')$.
- (b) On a alors $g'(h(b) - b') = g'(h(b)) - g'(b')$, et comme $g' \circ h = g$, on a $g'(h(b) - b') = g(b) - g'(b') = 0$. Par conséquent, $h(b) - b' \in \text{Ker}(g')$, et comme $\text{Ker}(g') = \text{Im}(f')$, $h(b) - b' \in \text{Im}(f')$. Soit $a \in A$ tel que $h(b) - b' = f'(a)$. Comme $f' = h \circ f$, on a $h(b) - b' = h(f(a))$, donc $h(b) - b' \in \text{Im}(h)$.
- (c) On a donc $b' = h(b) - h(f(a)) = h(b - f(a))$, et donc $b' \in \text{Im}(h)$. Cela montre bien que h est surjective. Étant une application linéaire injective et surjective, h est donc un isomorphisme.

Correction de l'exercice 11 – (D'après ESCL 1993)

1. (a) • f étant linéaire, on a :

$$(f - a \cdot \text{id}) \circ (f - b \cdot \text{id}) = f \circ f - af - bf + ab \cdot \text{id} = a^2 P + b^2 q - a^2 p - abq - abp - b^2 q + ab(p + q) = 0.$$

- De même,

$$(f - b \cdot \text{id}) \circ (f - a \cdot \text{id}) = f \circ f - bf - af + ab \cdot \text{id} = 0.$$

(b) On a $f - a \cdot \text{id} = ap + bq - a(p + q) = (b - a)q$, et de même $f - b \cdot \text{id} = ap + bq - b(p + q) = (a - b)p$.

(c) Ainsi,

$$0 = (f - a \cdot \text{id}) \circ (f - b \cdot \text{id}) = (b - a)q \circ ((a - b)p) = -(a - b)^2 q \circ p$$

puisque q est linéaire. Ainsi, puisque $(a - b)^2$ est un scalaire non nul par hypothèse, $q \circ p = 0$. De même en inversant le rôle de a et b , on trouve $p \circ q = 0$.

(d) On a $p + q = \text{id}$. En composant par p , on obtient $p \circ p + p \circ q = p$, et comme $p \circ q = 0$, on trouve finalement $p \circ p = p$. Ainsi, p est un projecteur.

De même, en composant par q au lieu de p , on trouve $q \circ q = q$, donc q est un projecteur de E .

2. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $f^n = a^n p + b^n q$.

On a $f^0 = \text{id} = p + q = a^0 p + b^0 q$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Alors

$$f^{n+1} = f^n \circ f = (a^n p + b^n q) \circ f = a^n p \circ f + b^n q \circ f.$$

Or, $f = ap + bq$, donc p étant linéaire, $p \circ f = a \cdot p \circ p + b \cdot p \circ q = ap$, puisque p est un projecteur et que $p \circ q = 0$.

De même, $q \circ f = q \circ (ap + bq) = a \cdot q \circ p + b \cdot q \circ q = bq$.

Ainsi $f^{n+1} = a^{n+1} p + b^{n+1} q$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3. (a) On a, par linéarité de f :

$$f \circ \left(\frac{1}{a} \cdot p + \frac{1}{b} \cdot q \right) = \frac{1}{a} f \circ p + \frac{1}{b} f \circ q.$$

Comme dans la question précédente, $f \circ p = (ap + bq) \circ p = ap \circ p + bq \circ p = ap$, et $f \circ q = bq$. Ainsi,

$$f \circ \left(\frac{1}{a} \cdot p + \frac{1}{b} \cdot q \right) = \frac{1}{a} \cdot ap + \frac{1}{b} \cdot bq = p + q = \text{id}.$$

(b) De la même façon, on a :

$$\left(\frac{1}{a} \cdot p + \frac{1}{b} \cdot q \right) \circ f = \frac{1}{a} \cdot p \circ f + \frac{1}{b} \cdot p \circ q = \frac{1}{a} \cdot ap + \frac{1}{b} \cdot bq = p + q = \text{id}.$$

Ainsi, f est bijective, et $f^{-1} = \frac{1}{a} \cdot p + \frac{1}{b} \cdot q$. Puisque f est linéaire, f est donc un isomorphisme.

(c) En posant $a' = \frac{1}{a}$ et $b' = \frac{1}{b}$, la récurrence de la question 2 donne immédiatement

$$(f^{-1})^n = \frac{1}{a^n} \cdot p + \frac{1}{b^n} \cdot q.$$

4. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f - \lambda \text{id} = ap + bq - \lambda p - \lambda q = (a - \lambda)p + (b - \lambda)q$.

Si $a - \lambda$ et $b - \lambda$ sont non nuls, le même calcul que dans la question 3 donne l'inversibilité de $f - \lambda \text{id}$, un inverse étant $\frac{1}{a-\lambda} \cdot p + \frac{1}{b-\lambda} \cdot q$.

Si $a - \lambda = 0$, alors $f - \lambda \text{id} = (b - 1)q$. Cette application linéaire est non inversible, sinon, $\text{Ker}((b - 1)q) = \{0\}$, et comme $b - 1 \neq 0$ (puisque $a \neq b$), on obtiendrait $\text{Ker}(q) = \{0\}$. Or, p étant un projecteur, on a $\text{Ker } q \oplus \text{Im } q = E$, donc on aurait $\text{Im } q = E$. Mais pour tout x de $\text{Im } q$, donc pour tout x de E on a $q(x) = x$, donc $q = \text{id}$, puis $p = 0$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

De même, si $b - \lambda = 0$, $f - \lambda \text{id}$ est non inversible.

Ainsi, $S = \{a, b\}$.

(b) • Soit $x \in \text{Ker}(f - a \cdot \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - b \cdot \text{id})$. Alors

$$f(x) - ax = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = bx, \quad \text{donc:} \quad ax = bx \quad \text{soit:} \quad (a - b)x = 0.$$

Comme $a - b \neq 0$, on en déduit que $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(f - a \cdot \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - b \cdot \text{id}) = \{0\}$, donc la somme de ces deux espaces vectoriels est directe.

- $\text{Ker}(f - a \cdot \text{id})$ et $\text{Ker}(f - b \cdot \text{id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E , donc leur somme aussi, d'où l'inclusion $\text{Ker}(f - a \cdot \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - b \cdot \text{id}) \subset E$
- Réciproquement, soit $x \in E$. Comme $p + q = \text{id}$, on peut écrire $x = p(x) + q(x)$. Or

$$(f - a \cdot \text{id})p(x) = (b - a)q \circ p(x) = 0,$$

donc $p(x) \in \text{Ker}(f - a \cdot \text{id})$, et de même $q(x) \in \text{Ker}(f - b \cdot \text{id})$.

Ainsi, $x \in \text{Ker}(f - a \cdot \text{id}) + \text{Ker}(f - b \cdot \text{id})$. D'où l'inclusion $E \subset \text{Ker}(f - a \cdot \text{id}) + \text{Ker}(f - b \cdot \text{id})$.

Ayant les deux inclusions, et la somme étant directe, on peut donc conclure que $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id}) = E$.

Correction de l'exercice 12 – (D'après Mines 1990, partie I)

1. De manière évidente, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit P et Q deux polynômes et λ un réel. Alors

$$\varphi(\lambda P + Q)(X) = (\lambda P + Q)(X+1) + (\lambda P + Q)(X) = \lambda(P(X+1) + P(X)) + (Q(X+1) + Q(X)) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).$$

Donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $P(X+1) + P(X) = 0$. Si P est non nul, soit $d \in \mathbb{N}$ son degré et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant. Alors $P(X+1)$ est de même degré, et même coefficient dominant que $P(X)$. Par conséquent, les coefficients dominants ne se compensant pas, le degré de $P(X+1) + P(X)$ est d et son coefficient dominant est $2a_d \neq 0$. En particulier, $P(X) + P(X+1)$ est non nul, ce qui contredit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. On en déduit que $P = 0$, donc que $\text{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$, puis $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, l'inclusion réciproque étant immédiate.

(b) Par conséquent, d'après le cours, φ est injective.

- (c) Au cours de la démonstration de la question 2(a), nous avons vu que $\deg \varphi(P) = \deg(P)$, donc si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\varphi(P)$ aussi. Ainsi, φ se restreint en un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans peu de temps, $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie, on pourra dire directement que φ , étant injective, est un isomorphisme (vrai pour toute application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de **même dimension finie**). Ce résultat sera une conséquence immédiate du théorème du rang.

Ne disposant pas encore de ce résultat, je donne un autre argument.

Soit $(1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors φ étant injective $(\varphi(1), \dots, \varphi(X^n))$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Son cardinal étant égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, c'en est une base, donc en particulier une famille génératrice. Or, $(1, X, \dots, X^n)$ étant une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(1), \dots, \varphi(X^n)) = \mathbb{R}_n[X].$$

Ainsi, φ restreint à $\mathbb{R}_n[X]$ est une surjection sur $\mathbb{R}_n[X]$. Étant aussi injective, c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- (d) Ayant déjà justifié l'injectivité de φ , il reste à montrer sa surjectivité. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, φ se restreignant en un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (donc $Q \in \mathbb{R}[X]$) tel que $P = \varphi(Q)$. Ainsi, φ est surjective, puis bijective.

Ainsi, φ est un endomorphisme bijectif, donc un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit $E = \text{Ker}(\varphi - 2\text{id})$, et F l'ensemble des polynômes s'annulant en 0. On note F_n le sous-ensemble de F constitué des polynômes de F de degré inférieur ou égal à n .

- (a) • Par définition, F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$, et $0 \in F$, car le polynôme nul s'annule en 0.

De plus, soit P et Q deux éléments de F , et λ un scalaire. Alors $(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$, donc $\lambda P + Q \in F$. Ainsi, F est stable par combinaisons linéaires.

Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $F_n = \mathbb{R}_n[X] \cap F$, et donc, F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels. De plus, $F_n \subset F$, donc il s'agit d'un sous-espace vectoriel de F .

- (b) • Soit $P \in E$. Alors $0 = \varphi(P)(X) - 2P(X) = P(X+1) - P(X)$, donc $P(X+1) = P(X)$. Si P admet une racine réelle ou complexe r , alors $P(r+1) = P(r) = 0$, et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(r+n) = 0$. Ainsi, P admet une infinité de racine donc P est nul. Ainsi, soit P est le polynôme nul, soit P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}$, ce qui, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, n'est possible que si P est constant. Dans les deux cas de figure, $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi, $E \subset \mathbb{R}_0[X]$.

- Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Alors P est constant, donc $P(X+1) = P(X)$, donc $P \in \text{Ker}(\varphi - 2\text{id}) = E$, d'où $\mathbb{R}_0[X] \subset E$.

Les deux inclusions amènent l'égalité $E = \mathbb{R}_0[X]$.

- (c) • Soit $P \in E \cap F$. Alors P est constante, et s'annule en 0. Cela n'est possible que si $P = 0$, bien sûr ; Ainsi, $E \cap F = \{0\}$, donc la somme $E + F$ est directe.
- On a bien sûr $E + F \subset \mathbb{R}[X]$. De plus, soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $P = (P - P(0)) + P(0)$, avec $P(0) \in \mathbb{R}_0[X] = E$, et $P - P(0) \in F$. Donc $P \in E + F$, et donc $\mathbb{R}[X] \subset E + F$, puis $E + F = \mathbb{R}[X]$.
- (d) Soit f la restriction de $\varphi - 2\text{id}$ à F . Soit $P \in \text{Ker } f$. Alors $f(P) = 0$, donc $P \in F$ et $P \in \text{Ker}(\varphi - 2\text{id})$, donc $P \in E \cap F = \{0\}$. Par conséquent, $\text{Ker}(f) = \{0\}$, donc f est injective.

De plus, soit f_n la restriction de $\varphi - 2\text{id}$ à F_n . Alors f_n est injective. Donc f_n est un isomorphisme de F_n sur son image $\text{Im}(f_n)$. Par conséquent, F_n et $\text{Im}(f_n)$ étant isomorphes, ils ont même dimension. Ainsi,

$$\dim \text{Im}(f_n) = \dim(F_n) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim E = n + 1 - 1 = n,$$

car par un argument similaire à celui de la question précédente, $E \oplus F_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs, pour tout P de degré d , $P(X+1)$ est aussi de degré d , donc la différence $P(X+1) - P(X)$ est de degré au plus d . Les deux polynômes $P(X)$ et $P(X+1)$ ont même coefficient dominant, donc le terme de degré d de $P(X+1) - P(X)$ est nul. Ainsi, $\varphi(P) - 2P$ est de degré au plus $d-1$. Par conséquent f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On a donc $\text{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ces deux espaces étant de même dimension n , on en déduit qu'on a une égalité, et donc que f_n est surjective.

Ainsi, f_n est un isomorphisme de F_n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- (e) On a déjà répondu à cette question en fait : $\deg(\varphi - 2\text{id})(P) < \deg P$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n vérifie $(\varphi - 2\text{id})(U_n) = U_{n-1}$ et $U_n \in F$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: U_n vérifiant les conditions requises existe (et est unique).

U_0 est donné explicitement, donc existe.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que U_n existe et vérifie les propriétés requises. Alors :

- Comme $\varphi - 2\text{id}$ est injective sur chaque F_n , elle est injective sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n = F$, car ces ensembles sont inclus les uns dans les autres. En effet, soit $P \in \text{Ker}((\varphi - 2\text{id})|_F)$. Alors il existe n tel que $P \in F_n$, et donc puisque $\varphi - 2\text{id}$ est injective sur F_n , $P = 0$.
- De plus, comme la restriction de $\varphi - 2\text{id}$ à chaque F_n , $n \geq 1$, est surjective sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi - 2\text{id}$ est surjective sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.

Ainsi, $\varphi - 2\text{id}$ induit un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}[X]$. Par conséquent, il existe un unique polynôme U_{n+1} de F (c'est-à-dire vérifiant $U_{n+1}(0) = 0$), tel que $(\varphi - 2\text{id})(U_{n+1}) = U_n$, c'est-à-dire $U_{n+1}(X+1) - U_{n+1}(X) = U_n(X)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Par conséquent, il existe une suite de polynômes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vérifiant $U_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(0) = 0$, et $U_n(X+1) = U_n(X) + U_{n-1}(X)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit d_n le degré de U_n et a_n son coefficient dominant. Ainsi, il existe un polynôme P de degré au plus $d_n - 1$ tel que $U_n = a_n X^{d_n} + P$. On a de plus, en évaluant en 0, $P(0) = 0$, puisque $U_n(0) = 0$. Ainsi, $P \in F_{d_n-1}$. On a alors, par linéarité de φ ,

$$(\varphi - 2\text{id})(U_n) = a_n((X+1)^{d_n} - X^{d_n}) + (\varphi - 2\text{id})(P).$$

Or,

$$a_n((X+1)^{d_n} - X^{d_n}) = a_n \sum_{k=0}^{d_n} \binom{d_n}{k} X^k - a_n X^{d_n} = a_n \sum_{k=0}^{d_n-1} \binom{d_n}{k} X^k.$$

Ainsi, il s'agit d'un polynôme de degré $d_n - 1$ et de coefficient dominant $a_n \binom{d_n}{d_n-1} = a_n d_n$.

De plus, $\varphi - 2\text{id}$ se restreint en une bijection de F_{d_n-1} sur $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, donc $(\varphi - 2\text{id})(P)$ est de degré au plus $d_n - 2$. On en déduit que $(\varphi - 2\text{id})(U_n)$ est de degré $d_n - 1$, et de coefficient dominant $a_n d_n$.

Or, $(\varphi - 2\text{id})(U_n) = U_{n-1}$, par conséquent, on obtient les relations, pour tout $n \geq 1$:

$$d_n = d_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad a_{n-1} = a_n d_n.$$

La première relation définit une suite arithmético-géométrique de raison 1, et de terme initial $d_0 = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = n$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, donc $a_n = \frac{a_0}{n!} = \frac{1}{n!}$.

5. Soit, pour tout N dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(N)$: $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

(U_0) est non nul, et c'est un polynôme constant, donc dans $\mathbb{R}_0[X]$. Comme cet espace est de dimension 1, (U_0) est bien une base de $\mathbb{R}_0[X]$ (vous remarquerez qu'il s'agit de la base canonique, en fait). Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Tout d'abord, les U_i , $i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, sont bien des éléments de $\mathbb{R}_{N+1}[X]$, d'après la question précédente. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{N+1}$ des scalaires tels que

$$\lambda_0 U_0 + \dots + \lambda_{N+1} U_{N+1} = 0.$$

Pour tout $i < N+1$, $\deg U_i = i < N+1$. Ainsi, U_{N+1} est le seul terme qui contribue à donner un terme de degré $N+1$. Soit a_{N+1} son coefficient dominant. Alors $a_{N+1} \neq 0$, et le terme de degré $N+1$ dans l'expression de gauche est $\lambda_{N+1} a_{N+1}$. Par identification des coefficients dans l'égalité ci-dessus, on en déduit que $\lambda_{N+1} a_{N+1} = 0$, et comme $a_{N+1} \neq 0$, il vient $\lambda_{N+1} = 0$. Ainsi,

$$\lambda_0 U_0 + \dots + \lambda_N U_N = 0.$$

Or, par hypothèse de récurrence, la famille $(U_0, \dots, U_N)$ est libre, donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_N = 0$. Ainsi, $(U_0, \dots, U_{N+1})$ est une famille libre. Son cardinal est $N+2$, et il s'agit d'une famille libre dans l'espace $\mathbb{R}_{N+1}[X]$, qui est dimension $N+2$ également. Ainsi, c'est une base de $\mathbb{R}_{N+1}[X]$. D'où $\mathcal{P}(N+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout N dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(N)$ entraîne $\mathcal{P}(N+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(N)$ est vraie pour tout N dans $\mathbb{N}$.

6. L'existence et l'unicité de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ provient du fait que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$, d'après la question 2(d). Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2X^n$ admet un unique antécédent P_n par φ .
7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $Q_n(X) = (-1)^n P_n(1-X)$. On a :

$$Q_n(X) + Q_n(X+1) = (-1)^n (P_n(1-X) + P_n(-X)) = (-1)^n 2(-X)^n = 2X^n,$$

d'après la relation satisfaite par P_n . Ainsi, $\varphi(Q_n) = 2X^n = \varphi(P_n)$, et par injectivité de φ , $Q_n = P_n$.

- (b) En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}(1-X) = P_{2n}(X)$, donc $P_{2n}(1) = P_{2n}(0)$. De plus, en évaluant en 0 la relation définissant P_{2n} , on obtient :

$$P_{2n}(0) + P_{2n}(1) = 2 \cdot 0^{2n} = 0.$$

Ainsi, il vient immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}(0) = P_{2n}(1) = 0$.

Pour $n = 0$, on obtient $P_0(0) + P_0(1) = 2$, et $P_0(0) = P_0(1)$, donc $P_0(0) = P_0(1) = 1$. Dans ce cas, on vérifiera aisément d'ailleurs que P_0 est le polynôme constant égal à 1 (ce polynôme vérifie l'égalité requise, et par unicité, il est donc égal à P_0).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de la question précédente amène $P_{2n+1}(1-X) = -P_{2n+1}(X)$, d'où, en évaluant cette expression en $\frac{1}{2}$:

$$P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{donc:} \quad P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

- (c) Soit $n \geq 1$, et $R_n = \frac{P'_n}{n}$. Alors

$$R_n(X+1) + R_n(X) = \frac{1}{n} (P'_n(X+1) + P'_n(X)) = \frac{1}{n} \cdot 2nX^{n-1},$$

en dérivant l'équation définissant P_n . Ainsi,

$$R_n(X+1) + R_n(X) = 2X^{n-1}.$$

Ainsi, R_n vérifie la même relation que P_{n-1} . Par unicité de la solution de cette équation, on en déduit que $R_n = P_{n-1}$, donc que $P'_n = nP_{n-1}$.

On en déduit notamment que :

- $P_0 = 1$ (déjà vu)
- P_1 vérifie $P_1' = 1 \cdot P_0 = 1$, donc $P_1 = X + a$, pour une certaine valeur de a . Comme de plus, $\frac{1}{2}$ est racine de P_1 , on en conclut que $P_1 = X - \frac{1}{2}$.
- $P_2' = 2 \cdot (X - \frac{1}{2})$, donc il existe a tel que $P_2 = X^2 - X + a$. De plus, $P_2(0) = P_2(1) = 0$, d'où $a = 0$, et donc $P_2 = X^2 - X$.
- $P_3' = 3P_2 = 3(X^2 - X)$ donc $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + a$. Comme $P_2(\frac{1}{2}) = 0$, on obtient $a = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$, et par conséquent

$$P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4}.$$

- $P_4' = 4X^3 - 6X^2 + 1$, donc $P_4 = X^4 - 2X^3 + X + a$, et $a = 0$, car $P_4(0) = 0$. Ainsi

$$P_4 = X^4 - 2X^3 + X.$$

On vérifie rapidement que $P_4(1) = 0$.

- $P_5' = 5X^4 - 10X^3 + 5X$ donc $P_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{2}X^2 + a$. L'égalité $P_5(\frac{5}{2})$ amène $a = -\frac{1}{32} + \frac{5}{32} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{2}$. Ainsi

$$P_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}.$$

(d) On regarde ce qu'il se passe sur les petits rangs pour deviner la propriété à démontrer.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

- si $n \equiv 1 \pmod{4}$, P_n est strictement croissante sur $[0, 1]$
- si $n \equiv 2 \pmod{4}$, P_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$;
- si $n \equiv 3 \pmod{4}$, alors P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$;
- si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors P_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

.

La propriété $\mathcal{P}(1)$ dit la croissance de P_1 , ce qui est vrai, vu l'expression de P_1 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors :

- si $n \equiv 1 \pmod{4}$, alors $n - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, donc P_{n-1} est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Comme $P_{n-1}(0) = P_{n-1}(1) = 0$, on en déduit que la fonction polynomiale P_{n-1} est positive. De plus, P_n' est du signe de P_{n-1} d'après la question précédente, donc P_n est croissante sur $[0, 1]$.
- Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, alors $n - 1 \equiv 1 \pmod{4}$, donc P_{n-1} est croissante sur $[0, 1]$, et s'annule en $\frac{1}{2}$. Donc P_{n-1} (et donc P_n) est négative sur $[0, \frac{1}{2}]$ et positive sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Ainsi, P_n est décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, alors $n - 1 \equiv 2 \pmod{4}$, donc P_{n-1} est décroissante puis croissante et s'annule en 0 et 1, donc P_{n-1} (et par conséquent, P_n') est négative sur $[0, 1]$. Ainsi P_n est décroissante sur $[0, 1]$.
- Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors $n - 1 \equiv 3 \pmod{4}$, et P_{n-1} est décroissante sur $[0, 1]$, s'annulant en $\frac{1}{2}$. Par conséquent, P_{n-1} est positive sur $[0, \frac{1}{2}]$ et négative sur $[\frac{1}{2}, 1]$, et de même que précédemment, P_n est alors croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.