Algèbre 10 – Endomorphismes symétriques, formes quadratiques
Quelques corrections

Correction de l'exercice 3 –

1. Les matrices A et B sont symétriques réelles, donc diagonalisables.
2. On a, en notant C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A :

$$A^2 = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4, C_1 + C_2 + C_3 + C_4, C_1 + C_2 + C_3 + C_4, C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4A.$$

De même, en notant C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 les colonnes de B :

$$B^2 = (C'_1 - C'_3, C'_2 - C'_4, -C'_1 + C'_3, -C'_2 + C'_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2B.$$

Ainsi :
- le polynôme $X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A, dont les racines sont 0 et 4. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 4\}$. Puisque A est diagonalisable, A possède au moins une valeur propre. Si A ne possédait qu'une valeur propre λ, puisqu'elle est diagonalisable, elle serait égale à la matrice d'une homothétie, $A = \lambda I_4$, ce qui n'est clairement pas le cas ! Ainsi, A admet au moins deux valeurs propres distinctes. L'inclusion ci-dessus, et la condition obtenue sur le cardinal de $\mathrm{Sp}(A)$ amène donc en définitive : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 4\}$.
- De même, le polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de B, de racines 0 et 2, donc $\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 2\}$. Le même argument que pour A amène l'égalité : $\mathrm{Sp}(B) = \{0, 2\}$.

3.
- Les colonnes de A sont non nulles et toutes identiques, donc A est de rang 1. Ainsi, le sous-espace propre $E_0(A)$ de A associé à la valeur propre 0, égal à $\mathrm{Ker}(a)$, est de dimension 4-1=3, d'après le théorème du rang. Or, les relations $C_1 - C_2 = 0$, $C_1 - C_3$, et $C_1 - C_4$ entre les colonnes de A montrent que les vecteurs $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans E_0. De plus, ces vecteurs forment une famille libre, car ils sont échelonnés selon leur dernière coordonnée non nulle. Comme $\dim E_0(A) = 3$, on en déduit que (b_1, b_2, b_3) est une base de $E_0(A)$.
- Puisque 4 est la seule autre valeur propre de A, et que A est diagonalisable, on en déduit que :

$$\dim E_4(A) = 4 - \dim E_0(A) = 1.$$

Il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans $E_4(A)$. D'après un argument qu'on a eu l'occasion de développer ensemble, puisque A est symétrique de rang 1, un vecteur propre associé à la valeur propre non nulle sera forcément donné par une colonne non nulle de A, donc $b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le calcul suivant :

$$Ab_4 = 4b_4$$

suffit amplement à justifier l'appartenance de b_4 à $E_4(A)$, et par suite, $E_4(A)$ étant de dimension 1, (b_4) est une base de $E_4(A)$.

- Les colonnes C_3' et C_4' de B sont colinéaires respectivement aux colonnes C_1' et C_2', et de plus, les colonnes C_1' et C_2' sont non colinéaires, donc le rang de B est 2. Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme b :

$$\dim E_0(B) = \dim \operatorname{Ker} b = 4 - \operatorname{rg} b = 2.$$

Or, les relations $C_1' + C_3' = 0$ et $C_2' + C_4' = 0$ montrent que les vecteurs $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\operatorname{Ker} b$ dons dans $E_0(B)$. Cet espace étant de dimension 2, et ces deux vecteurs étant non colinéaires, (c_1, c_2) est une base de $E_0(B)$.

- Puisque 2 est la seule autre valeur propre de B, et que B est diagonalisable, on en déduit que :

$$\dim E_2(B) = 4 - \dim E_0(B) = 2.$$

Or, $B - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Les colonnes C_1'', C_2'', C_3'', C_4'' de cette matrice vérifient $C_1'' - C_3'' = 0$ et $C_2'' - C_4'' = 0$, donc les vecteurs $c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans $E_2(B)$. Comme ils sont non colinéaires, et que $E_2(B)$ est de dimension 2, on en déduit que (c_3, c_4) est une base de $E_2(B)$.

4. On recherche une base (e_1, e_2, e_3, e_4) orthonormale, formée de vecteurs propres communs de A et de B. Pour cela, on détermine l'intersection des espaces propres de A et des espaces propres de B.

- Une vérification rapide montre que $c_3 \in E_0(A)$ et $c_4 \in E_0(a)$, donc $E_2(B) \subset E_0(A)$. Donc :
  * $E_2(B) \cap E_0(A) = E_2(B) = \operatorname{Vect}(c_3, c_4)$
  * $E_2(B) \cap E_4(B) = \{0\}$

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_0(B) \cap E_0(A)$, alors $AX = 0$ et $BX = 0$, ce qui fournit les équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-z & = & 0 \\ y-t & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{soit:} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ x & = & z \\ y & = & t \end{array} \right. \quad \text{soit:} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & t \\ z & = & -t \end{array} \right.$$

Ainsi, $E_0(B) \cap E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}(c_1 - c_2)$.

- Une vérification rapide montre que $b_4 = c_1 + c_2$, donc $b_4 \in E_0(B)$. Ainsi, $E_4(A) \subset E_0(B)$, donc

$$E_4(A) \cap E_0(B) = E_4(A) = \operatorname{Vect}(b_4).$$

De plus, la famille $(c_3, c_4, c_1 - c_2, b_4)$ est une famille orthogonale (vérification immédiate, ou alors on peut le justifier par le fait que $c_3 \perp c_4$ par coup de chance, puis que $c_1 - c_2$ est dans $E_0(B)$ qui est orthogonal à $E_2(B)$ contenant en particulier c_3 et c_4, et enfin que b_4 est dans $E_4(A)$, qui est orthogonal à $E_0(A)$, qui contient en particulier c_3, c_4 et $c_1 - c_2$) Cette famille orthogonale ne contient pas de vecteur nul, donc elle est libre, et de cardinal 4, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Elle est formée, d'après les choix effectués, de vecteurs propres à la fois de A et de B. Il suffit donc de normaliser cette famille. On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad \text{et}\qquad e_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Alors la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est orthonormale, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\qquad \text{et}\qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5 – (D'après Ecricome 2000)

1. • Les matrices de type -1 vérifient ${}^tA = A^{-1}$: ce sont les $\boxed{\text{matrices orthogonales}}$.
   • Les matrices de type 0 vérifie ${}^tA = I_m$: il n'y a que $\boxed{\text{la matrice identité}}$
   • Les matrices de type 1 vérifient ${}^tA = A$: ce sont les $\boxed{\text{matrices symétriques}}$
2. (a) On a :
$$A^{(n^2)} = (A^n)^n = ({}^tA)^n = {}^t(A^n) = {}^t({}^tA) = A, \qquad \text{donc:}\qquad \boxed{A^{(n^2)} = A}.$$
   (b) On a :
$$B^n = (A^{n+1})^n = A^{n(n+1)} = A^{n^2}A^n = A\cdot A^n = A^{n+1}, \qquad \text{donc:}\qquad \boxed{B^n = B}.$$
   De plus, $B = A\cdot A^n = A\cdot {}^tA$, donc ${}^tB = {}^t({}^tA)\cdot {}^tA = A\cdot {}^tA = B$. Ainsi, $\boxed{B \text{ est symétrique}}$.
   (c) La matrice B est symétrique réelle, donc $\boxed{\text{elle est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ses valeurs propres sont donc toutes réelles. De plus, B vérifie $B^n = B$, donc $P = X^n - X = X(X^{n-1} - 1)$ est un polynôme annulateur de B. Puisque les valeurs propres de B sont réelles, on peut alors affirmer que :
$$\mathrm{Sp}(B) \subset \mathrm{rac}_{\mathbb{R}}(P) \subset \{0, -1, 1\}.$$
   Plus précisément, si n est impair, on peut uniquement dire $\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \{0,-1,1\}}$, et si n est pair, $\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \{0,1\}.}$
   (d) • Puisque V est un vecteur propre associé à -1, ${}^tVBV = -{}^tVV = -\|V\|^2 < 0$, puisque $V \neq 0$.
   • Par ailleurs, $B = A\,{}^tA$, donc ${}^tVBV = {}^tVA\,{}^tAV = {}^t({}^tAV)({}^tAV) = \|{}^tAV\|^2 \geqslant 0$
   Ainsi, les deux points précédents sont contradictoires, donc l'hypothèse de l'existence d'un vecteur propre associé à -1 est fausse, donc $\boxed{-1 \text{ n'est pas valeur propre de } B}$.
   (e) La matrice B étant diagonalisable, et ne possédant comme seules valeurs propres que 0 et 1 (au plus), il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D, constituée uniquement de 0 et de 1 sur la diagonale, telle que $B = PDP^{-1}$. On a alors $D^2 = D$, donc,
$$B^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = B.$$
   Ainsi, B est la matrice d'un projecteur. D'après la description géométrique des projecteurs, il s'agit du projecteur sur F_B parallèlement à E_B. Or, d'après une propriété des projecteurs, F_B est le sous-espace propre associé à 1, et E_B est bien sûr le sous-espace propre associé à 0.
   Comme les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux, on en déduit que $\boxed{B \text{ est la matrice d'un p}}$
   Remarque : dans ce raisonnement, et dans la suite, nous ne sommes pas certain que 0 et 1 sont effectivement des valeurs propres ; nous parlons tout de même des sous-espaces propres associés ; il est sous-entendu qu'il s'agit de l'espace $\{0\}$ si ce n'est pas une valeur propre, et on vérifie sans problème que toutes les affirmations restent vraies dans ce cas trivial.
3. (a) Soit $X \in E_B$. On a $BX = 0$, donc $A^{n+1}X = 0$, donc ${}^tAAX = 0$, donc ${}^tX\,{}^tAAX = 0$, donc $\|AX\|^2 = 0$, donc $AX = 0$, donc $X \in E_A$. Ainsi $\boxed{E_B \subset E_A}$
   Réciproquement, si $AX = 0$, alors, puisque $n > 1$, $A^{n+1}X = A^nAX = 0$, donc $BX = 0$. Donc $E_A \subset E_B$.
   Les deux inclusions amènent l'égalité $\boxed{E_A = E_B}$.

(b) Soit $X \in F_B$. Il existe Y tel que $X = BY = A^{n+1}Y = A(A^nY)$. En posant $Z = A^nX$, il existe donc Z tel que $X = AZ$, donc $X \in F_A$. Ainsi, $F_B \subset F_A$.

De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim(F_A) = m - \dim(E_A) = m - \dim(E_B) = \dim(F_B).$$

Ainsi, l'inclusion et l'égalité des dimensions amènent l'égalité : $\boxed{F_A = F_B}$

Nous avons déjà justifié que E_B et F_B sont les deux sous-espaces propres de B, et qu'ils sont orthogonaux. Donc, puisque B est diagonalisable, E_B et F_B sont supplémentaires orthogonaux. Puisque $E_A = E_B$ et $F_A = F_B$, on en déduit que $\boxed{E_A \text{ et } F_A \text{ sont supplémentaires orthogonaux.}}$

4. Soit U un vecteur de $F_A = F_B$. On a alors, B étant un projecteur, $BU = U$. Ainsi, puisque $B = A^nA = {}^tAA$,

$$\|AU\|^2 = {}^tU\,{}^tAAU = {}^tUBU = {}^tUU = \|U\|^2,$$

et donc $\boxed{\|AU\| = \|U\|}$.

5. Si A est inversible, alors $B = A^{n+1}$ est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de B. Ainsi, 1 étant la seule valeur propre de B et B étant diagonalisable, $B = I_m$. On enb déduit que $A^nA = I_m$, donc ${}^tAA = I_n$, donc $A^{-1} = {}^tA$. Ainsi, $\boxed{A \text{ est de type } -1}$ (c'est-à-dire orthogonale).

6. Supposons A de type n et $n+1$. Alors ${}^tA = A^{n+1} = B$, et B étant symétrique, $A = B$. Donc, d'après ce qui précède, $\boxed{A \text{ est une matrice de projecteur orthogonal.}}$

Correction de l'exercice 6 – La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Soit $\lambda \in RR$. Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_4$ est de rang inférieur ou égal à 3. Déterminons ce rang par la méthode du pivot de Gauss :

$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (1-\lambda)L_1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2\lambda & -\lambda & -2\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 - L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -7\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Cette matrice triangulaire est de rang au plus 3 si et seulement si au moins un terme de sa diagonale est nulle, donc si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 7$.

La matrice M_0 est de rang 1, donc E_0 est de dimension 3. Or, les colonnes de A vérifient $2C_1 - C_2 = 0$, $C_3 - C_4 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (2, -1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, -1)$ et $e_3 = (1, 0, 1, 0)$ sont dans E_0, et libres (échelonnés par rapport à leur dernière coordonnée non nulle). Par conséquent, la dimension de E_0 étant 3, ils forment une base de E_0. De plus, les deux premiers sont orthogonaux, ce qui nous facilitera la tâche d'orthonormalisation. Soit (f_1, f_2, f_3) la b.o.n. obtenue de (e_1, e_2, e_3) par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On a, puisque $e_1 \perp e_2$,

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0, 0) \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1).$$

Alors,
$$f_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \qquad \text{où} \qquad u_3 = e_3 - \langle e_3, f_1\rangle f_1 - \langle e_3, f_2\rangle f_2 = \frac{1}{10}(2,4,5,5).$$
On obtient donc :
$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(2,4,5,5).$$
Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est une b.o.n. de E_0.

La matrice M_7 vaut $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle est de rang 3, et ses colonnes vérifient :
$$C_4 + C_3 - 2C_2 - C_1 = 0,$$
donc $E_7 = \mathbb{R}(-1,-2,1,1)$. Un vecteur unitaire de E_7 est donc $f_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1,-2,1,1)$.
Puisque A est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, donc (f_1, f_2, f_3, f_4) est une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$. Soit P la matrice de passage de la base canonique dans cette *b.o.n.*. On a donc
$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{70}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$
Puisque P est la matrice de passage entre 2 bases orthonormales, P est une matrice orthogonale, et on obtient donc finalement
$$^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
Remarquez que 7 est le carré de la norme de la première colonne, et que le vecteur propre trouvé est (à un coefficient près) la première colonne de A. Cela n'est pas anodin, c'est le cas pour toute matrice symétrique de rang 1. Pourquoi ?

Correction de l'exercice 7 – Soit $y = mx+p$ l'équation de la droite de régression de y en x. Ainsi, m et p minimisent l'expression :
$$(2-m-p)^2 + (-1-p)^2 + (2-2m-p)^2 + (-2+m-p)^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2-m-p \\ -1-p \\ 2-2m-p \\ -2+m-p \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right\|^2.$$
Ainsi, le couple (m, p) minimise l'expression $\|AX - B\|$, où :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
D'après le théorème des moindres carrés, cette expression atteint son minimum en une valeur (m, p) solution de l'équation $^tAA \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = {}^tAB$. Ainsi, on obtient le système d'équations :
$$\begin{cases} 6m + 2p &= 8 \\ 2m + 4p &= 1 \end{cases}$$
Ainsi, $m = \frac{3}{2}$ et $p = -\frac{1}{2}$.
La droite de régression de y en x est donc la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Transformation de legendre

1. (a) La matrice A étant symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A, associés respectivement aux valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} z_i e'_i$ (autrement dit, $X' = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est le vecteur des coordonnées de x dans la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$).

Alors,

$$f(x) = {}^tXAX = \langle X, AX \rangle = \langle x, u(x) \rangle ,$$

où u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Ainsi, par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de u :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} z_i e'_i, u\left(\sum_{i=1}^{n} z_i e'_i\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} z_i e'_i, u \sum_{j=1}^{n} z_j u(e'_j) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} z_i e'_i, u \sum_{j=1}^{n} z_j \lambda_j e'_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_i z_j \lambda_j \left\langle e'_i, e'_j \right\rangle .
\end{aligned}$$

Comme la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est orthonormale, $\left\langle e'_i, e'_j \right\rangle = 0$ sauf si $i = j$, et il reste donc :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2.$$

De plus,

$$\langle p, x \rangle = \left\langle p, \sum_{i=1}^{n} z_i e'_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \langle p, e'_i \rangle .$$

On pose $p'_i = \langle p, e'_i \rangle$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On reconnait les coordonnées du vecteur p dans la base orthonormale $(e'_1, \ldots, e'_n)$. On obtient alors :*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (z_i p'_i - \lambda_i z_i^2).$$

Ainsi, dans cette formule, la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de vecteurs propres de A, les λ_i sont les valeurs propres correspondantes, et le p'_i sont les coordonnées de p dans cette base.

(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, et soit g_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_i(y) = yp'_i - \lambda_i y^2$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g'_i(y) = p'_i - 2\lambda_i y.$$

Comme $\lambda_i > 0$ d'après l'énoncé (c'est une valeur propre de A, g'_i est positive sur $]-\infty, \frac{p'_i}{2\lambda_i}]$, et négative sur $[\frac{p'_i}{2\lambda_i}, +\infty[$. Ainsi, g_i présente un maximum M_i au point $\frac{p'_i}{2\lambda_i}$.

On a alors, pour tout $x \in RR^n$,

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (z_i p'_i - \lambda_i z_i^2) = \sum_{i=1}^{n} g_i(z_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Ainsi, F est majorée par la quantité $\sum_{i=1}^{n} M_i$

De plus, en posant $x_0 = \sum \frac{p'_i}{2\lambda_i} \cdot e'_i$, il vient :

$$F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} g_i\left(\frac{p'_i}{2\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} M_i$ est un majorant de F, et ce majorant est atteint au point x_0. C'est le maximum de F.

On définit alors l'application $L(f) : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(f)(p) = \max_{x \in E}(\langle p, x\rangle - f(x)).$$

Cette application est appelée transformée de Legendre de f.

2. (a) Nous avons montré plus haut que pour tout $p \in E$,

$$L(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} g_i\left(\frac{p'_i}{2\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p'_i}{2\lambda_i}p'_i - \lambda_i\frac{p'^2_i}{4\lambda_i^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{p'^2_i}{4\lambda_i} = {}^tP'D'P',$$

où D' est la matrice diagonale dont le i-ième terme diagonal est égal à $\frac{1}{4\lambda}$, et P' le vecteur des coordonnées de p dans la base $(e'_1, \dots, e'_n)$.

Soit D la matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont égales au valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dans cet ordre. Alors on a $D' = \frac{1}{4}D^{-1}$. De plus, d'après le chois de la base $(e'_1, \dots, e'_n)$, si Q désigne la matrice de passage de la base canonique à la base $(e'_1, \dots, e'_n)$, la formule de changement de base sur l'endomorphisme canoniquement associé à a donne la relation :

$$D = Q^{-1}AQ = {}^tQAQ,$$

puisque la matrice Q est orthogonale (en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormales). De plus la relation entre les vecteurs coordonnées de p s'écrit alors :

$$P = QP' \qquad \text{soit:} \qquad P' = {}^tQP.$$

Ainsi, on obtient :

$$L(f)(p) = \frac{1}{4}\,{}^t(QP)D^{-1}(QP) = \frac{1}{4}\,{}^tP\,{}^tQD^{-1}QP.$$

Soit $B = \frac{1}{4}\,{}^tQD^{-1}Q$. On a

$$(QD^{-1}Q) \cdot A = {}^tQD^{-1}Q\,{}^tQDQ = {}^tQD^{-1}DQ = {}^tQQ = I_n,$$

donc en fin de compte, $B = \frac{1}{4}A^{-1}$. Alors, cette matrice vérifie la relation

$$L(f)(p) = {}^tPBP.$$

(b) Tout d'abord, $L(f)$ est bien une fonction s'écrivant de la même façon que f (une forme quadratique), donc on peut bien appliquer L une nouvelle fois à $L(f)$. D'après la question précédente, il existera une matrice C telle que

$$\forall x \in E, \quad L(L(f))(x) = {}^tXCX,$$

où $C = \frac{1}{4}B^{-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}A^{-1}\right)^{-1} = A$. Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad L(L(f))(x) = f(x) \qquad \text{soit:} \qquad L(L(f)) = f.$$

Ainsi, L est une involution sur l'ensemble des formes quadratiques.