Algèbre 2 – Révisions d'algèbre linéaire (point de vue matriciel)

Correction de l'exercice 7 –

1. Montrons que E un un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - On a évidemment $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   - Avec $P = 0$, on obtient $0 \in E$,
   - Soit f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = Q(x)\mathrm{e}^x.$$

     Ainsi,

     $$\forall x \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)(x) = (P(x) + \lambda Q(x))\mathrm{e}^x.$$

     Comme, d'après les régles sur les degrés, $P + \lambda Q$ est encore un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, il vient que $f + \lambda g$ est dans E.

   Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc c'est un espace vectoriel.

   De plus :
   - Soit $f \in E$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f = P \cdot \exp$. Notons :

     $$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0.$$

     Alors

     $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i(x).$$

     Par conséquent, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.
   - Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

     $$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i \mathrm{e}^x = 0.$$

     Comme l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on peut simplifier par e^x, et il vient

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0.$$

     Ainsi, le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ admet une infinité de racines. Il s'agit donc du polynôme nul, donc tous ses coefficients sont nuls, et donc :

     $$\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

     Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre.

   La famille $\mathcal{B}$ étant libre et génératrice de E, c'est une bas de E. Puisque cette base est de cardinal $n + 1$, on obtient $\dim E = n + 1$.

2. (a) Soit $f \in E$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

   Tout d'abord, D est bien définie, puisqu'une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f'(x) = (P'(x) + P(x))\mathrm{e}^x.$$

   Comme $\deg P' \leqslant \deg P$, on a encore $P + P' \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $f' \in E$. Ainsi, D est bien définie de E dans E.

De plus, pour tout $(f,g) \in E^2$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda D(f) + D(g).$$

Ainsi, D est une application linéaire.

Par conséquent, D est un endomorphisme de E.

(b) On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D(b_i)(x) = b_i'(x) = (x^i + ix^{i-1})\mathrm{e}^x = b_i(x) + ib_{i-1}(x).$$

Ainsi, les coordonnées de $D(b_i)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$[D(b_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0, \end{pmatrix}$$

le terme 1 étant sur la ligne d'indice i (la ligne supérieure étant d'indice 0, correspondant à l'indice de l'élément correspondant b_0 de la base $\mathcal{B}$)

De plus, si $i = 0$, $b_0 = \exp$, donc $D(b_0) = (b_0)$, et la colonne correspondante est contituée d'un 1 en première coordonnée, et des 0 partout ailleurs. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est carrée d'ordre $n+1$.

(c) La matrice de D dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous non nuls, donc elle est inversible. Donc D est un isomorphisme.

La matrice de D dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous égaux à 1. Ainsi, D possède une unique valeur propre égale à 1. Or, D n'est pas une homothétie (sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ n'est pas de la forme λI_{n+1}), donc D n'est pas diagonalisable.

Nous venons de justifier que $\mathrm{Sp}(D) = \{1\}$. De plus, étant donné f dans E, f est dans le sous-espace propre E_1 associé à 1 si et seulement si $D(f) = f$. Or, soit P tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)\mathrm{e}^x.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = (P(x) + P'(x))\mathrm{e}^x,$$

et par conséquent, $D(f) = f$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 0$, donc si P est un polynôme constant.

Ainsi, $E_0 = \mathrm{Vect}(\exp)$, c'est la droite vectorielle engendrée par la fonction exponentielle, c'est-à-dire par b_0.

3. (a) On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi : $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad f(b_j) = jb_{j-1}$, et $f(b_0) = 0$.

(b) En itérant ces relations, on trouve :

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N},\quad f^k(b_j) = \begin{cases} j(j-1)\cdots(j-k+1)b_{j-k} & \text{si } k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j. \end{cases}$$

En déduire l'expression de $f^k(b_j)$, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) On en déduit que :

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{k!}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{(k+1)!}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & \frac{n!}{(n-k)!} \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } k \leqslant n$$

et $B^k = 0$ si $b > n$.

(d) Bien entendu, B commute avec I_{n+1}, donc on peut utiliser la formule du binôme. Soit $k \leqslant n$. Alors

$$A^k = (B + I_{n+1})^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^\ell.$$

Je vous laisse donner la description matricielle de A^k, c'est plus facile avec un stylo qu'avec un ordinateur. Il reste dans cette matrice un coin supérieur droit constitué de 0.

Si $k > n$, cette fois, la somme précédente est tronquée, puisque les valeurs de B^ℓ sont nulles pour ℓ suffisamment grand. On remplit alors toute la partie supérieure de la matrice.

(e) Les coordonnées de $D^k(b_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont obtenues en multipliant la matrice A par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, reprsentant les coordonnées de b_n dans la base $\mathcal{B}$. Ce produit est égal à la dernière colonne de A^k.

- Ainsi, si $k \leqslant n$:

$$[D^k(b_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \binom{k}{k}\frac{n!}{(n-k)!} \\ \binom{k}{k-1}\frac{n!}{(n-k+1)!} \\ \vdots \\ \binom{k}{1}\frac{n!}{(n-1)!} \\ \binom{k}{0}\frac{n!}{n!} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si $k \leqslant n$

$$\forall x \in \mathbb{R}, b_n^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

On retrouve ce résultat directement par utilisation de la formule de Leibniz, en notant f_i la fonction $x \mapsto x^i$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad b_i^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \exp^{k-\ell}(x) f_n^\ell(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

- Si $k > n$, tout se passe de même en tronquant la somme :

$$[D^k(b_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \binom{k}{n}\frac{n!}{0!} \\ \binom{k}{n-1}\frac{n!}{1!} \\ \vdots \\ \binom{k}{1}\frac{n!}{(n-1)!} \\ \binom{k}{0}\frac{n!}{n!} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si $k > n$

$$\forall x \in \mathbb{R}, b_n^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!} x^{n-\ell} \mathrm{e}^x.$$

On retrouve ce résultat directement par utilisation de la formule de Leibniz, de même que plus haut, en constatant que les derniers termes apparaissant dans la somme sont nuls, car correspondent à une dérivée d'un polynôme, d'ordre supérieure à son degré.

4. **Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que $n = 5$.**

(a) On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule A^{-1} par la méthode du pivot, en faisant les mêmes opérations sur I_{n+1} que celles qui permettent de passer de A à I_{n+1} :

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_5 \leftarrow \underset{\longrightarrow}{L_5} - 5L_6 \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow \underset{\longrightarrow}{L_4} - 4L_5 \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & -60 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & 24 & -120 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & 24 & -120 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -24 & 120 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 2 & -6 & 24 & -120 \\
0 & 1 & -2 & 6 & -24 & 120 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 12 & -60 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$

(b) La primitivation étant l'opération inverse de la dérivation, les coordonnées d'une primitive de b_5 dans la base $\mathcal{B}$ sont données par

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ 120 \\ -60 \\ 20 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une primitive de b_5 est la fonction B_5 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_5(x) = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)\mathrm{e}^x.$$

(c) La seule impropreté de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^5\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ est en $-\infty$. Or, $\mathrm{e}^x = o\left(\frac{1}{x^7}\right)$ au voisinage de $-\infty$, donc $x^5\mathrm{e}^x = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on obtient la convergence de l'intégrale. De plus

$$\int_{-\infty}^0 x^5\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \Big[(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)\mathrm{e}^x\Big]_{\lim -\infty}^0 = -120 = -5!,$$

d'après les croissances comparées. On retouve la valeur de $\Gamma(6)$. En effet, en effectuant le changement de variables $y = -x$, on obtient

$$\int_{-\infty}^0 x^5\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} y^5\mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y = \Gamma(6).$$

5. C'est bien entendu une base de E et non de $\mathbb{R}_n[X]$ qu'il faut trouver (sinon la question n'a clairement aucun sens) On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $D(b_i) = b_i + ib_{i-1}$, donc $b_{i-1} = \frac{1}{i}(D(b_i) - b_i)$.

On recherche une base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ D(c_i) = c_i + c_{i-1}, \qquad \text{soit:} \qquad c_{i-1} = D(c_i) - c_i.$$

Posons par exemple $c_n = b_n$. Alors, d'après les relations ci-dessus, on doit nécessairement poser $c_{n-1} = nc_n$. Dans ce cas

$$c_{n-2} = D(c_{n-1}) - c_{n-1} = n(D(b_{n-1}) - b_{n-1}) = n(n-1)b_{n-2}.$$

En continuant ainsi, on peut donc poser, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$c_k = (k+1)(k+2)\dots nb_k.$$

Puisque $(b_0, \dots, b_n)$ est une base de E, et que $(c_0, \dots, c_n)$ est obtenu par multiplication par un coefficient non nul de chaque vecteur b_i, on en déduit que $(c_0, \dots, c_n)$ est une base de E. De plus,

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad D(c_k) = D((k+1)\dots nb_k) = (k+1)\dots n(b_k + kb_{k-1}) = c_k + c_{k-1}.$$

De plus, $D(c_0) = n!D(b_0) = n!b_0 = c_0$. Ainsi, la matrice de D dans la base $\mathcal{C} = (c_0, \dots, c_n)$ est bien :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 9 – (extrait de EDHEC 1999) *Le but de cet exercice est de trouver les couples* (u, v) *d'endomorphismes de* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant les quatre assertions suivantes :*

$$\begin{array}{llll} (A_1) & u^2 = u \circ u = -\mathrm{id} & (A_2) & v \neq \mathrm{id} \\ (A_3) & (v - \mathrm{id})^2 = 0 & (A_4) & \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) \neq \{0\}. \end{array}$$

1. **Étude d'un exemple.** On montre les versions matricielles des équations (A_1) à (A_4) :
   (a) $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, donc $u^2 = -\mathrm{id}$.
   (b) $V \neq I_2$, donc $v \neq \mathrm{id}$.
   (c) $(V - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$, donc $(v - \mathrm{id})^2 = 0$.
   (d) $U + V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc aussi $u + v - \mathrm{id}$; cette application linéaire n'est donc par injective, et par conséquent, $\mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.
2. **Retour au cas général**
   (a) i. On a $u \circ u = -\mathrm{id}$, donc $(-u) \circ u = u \circ (-u) = \mathrm{id}$. Ainsi, u est inversible (donc un automorphisme), d'inverse $u^{-1} = -u$.
   D'après (A_3), on a $v^2 - 2v + \mathrm{id} = 0$, donc $v(2\mathrm{id} - v) = (2\mathrm{id} - v)v = \mathrm{id}$. Par conséquent, v est un automorphisme, d'inverse $v^{-1} = 2\mathrm{id} - v$.
   ii. On a $v^0 = \mathrm{id}$, $v^1 = v$, et, d'après (A_3), $v^2 = 2v - \mathrm{id}$.
   Alors $v^3 = 2v^2 - v = 4v - 2\mathrm{id} - v = 3v - 2\mathrm{id}$
   Puis $v^4 = 3v^2 - 2v = 6v - 3\mathrm{id} - 2v = 4v - 3\mathrm{id}$.
   Conjecturons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $v^n = nv - (n-1)\mathrm{id}$ ».
   D'après ce qu'on vient de voir, $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ et $\mathcal{P}(4)$ sont satisfaits.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors :
   $$v^{n+1} = v \circ v^n = v \circ (nv - (n-1)\mathrm{id}) = nv^2 - (n-1)v = 2nv - n\mathrm{id} - (n-1)v = (n+1)v - n\mathrm{id}.$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) i. Soit $x \in \mathrm{Im}(v - \mathrm{id})$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $(v - \mathrm{id})(y) = x$. Par conséquent,

$$(v - \mathrm{id})(x) = (v - \mathrm{id})^2(y) = 0 \qquad \text{d'après } (A_3).$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$. Ainsi, $\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$.

ii. D'après (A_2), $v \neq \mathrm{id}$, donc $v - \mathrm{id} \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) \neq \mathbb{R}^2$. De plus, $v - \mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme, sinon son carré $(v - \mathrm{id})^2$ le serait aussi, ce qui contredirait (A_3). Ainsi, puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, $v - \mathrm{id}$ n'est pas injective, donc $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) \neq \{0\}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$, sev d'un espace de dimension 2, n'est ni de dimension 2, ni de dimension 0. Par conséquent,

$$\dim \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) = 1 \qquad \text{puis:} \qquad \dim \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) = 1,$$

d'après le théorème du rang. Ainsi, l'égalité des dimensions et l'inclusion de la question précédente montrent que c'est une égalité.

(c) $\mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) \neq \{0\}$, donc $\dim \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) > 0$; cette dimension est donc soit 1 soit 2.
Si $\dim \mathrm{Ker}(u+v-\mathrm{id}) = 2$, alors $u+v-\mathrm{id} = 0$, donc $-u = v-\mathrm{id}$. En élevant au carré (de composition), on obtient :

$$u^2 = (v - \mathrm{id})^2 \qquad \text{soit:} \qquad -\mathrm{id} = 0, \qquad \text{d'après } (A_1) \text{ et } (A_3)$$

ce qui est impossible. Ainsi, $\dim \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) = 1$

(d) Soit (b_2) une base de $\mathrm{Ker}(u+v-\mathrm{id})$, c'est-à-dire un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u+v-\mathrm{id})$. Soit $b_1 = -u(b_2)$.

i. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, il suffit de montrer que (b_1, b_2) est une famille libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-\lambda b_1 + \mu b_2 = 0$, soit $-\lambda u(b_2) + \mu b_2 = 0$. En composant par u, on obtient :

$$-\lambda u^2(b_2) + \mu b_2 = 0, \qquad \text{soit:} \qquad \lambda b_2 + \mu b_2 = 0 \qquad \text{puis:} \qquad -\lambda = \mu.$$

Ainsi, $\lambda(u(b_2) - b_2) = 0$. Or, $b_2 \in \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id})$, donc $u(b_2) - b_2 = -v(b_2)$, donc $\lambda v(b_2) = 0$. Comme v est un automorphisme, $v(b_2) \neq 0$, donc $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$. Ainsi, (b_1, b_2) est libre, donc une base de $\mathbb{R}^2$.

ii. $u(b_1) = -u^2(b_2) = b_2$, et $u(b_2) = -b_1$, donc $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$v(b_2) = b_2 - u(b_2) = b_2 + b_1$ et $v(b_1) = v^2(b_2) - v(b_2) = 2v(b_2) - b_2 - v(b_2) = v(b_2) - b_2 = b_1$, donc $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donner les matrices de u et v dans la base $\mathcal{B}'$.

(e) Les applications u et v solutions du problème sont exactement les applications pour lesquelles il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle leurs matrices sont U et V. Ainsi, à changement de base près, la solution étudiée dans la question 1 est unique.

Correction de l'exercice 10 – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(P) = -\frac{1}{6}P^{(3)}(0) \cdot (X^3 - X^2 - 2X) - \frac{1}{2}P''(0) \cdot (X^2 - 3X) + 2XP'(0) + 2P(0).$$

1. Tout d'abord, $f(P)$ est bien un polynôme, et son degré est inférieur ou égal à 3. Donc f définit une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Montrons que cette application est linéaire. Soit λ, $\mu \in \mathbb{R}$, et $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= -\frac{1}{6}(\lambda P^{(3)}(0) + \mu Q^{(3)}(0)) \cdot (X^3 - X^2 - 2X) - \frac{1}{2}(\lambda P''(0) + \mu Q''(0)) \cdot (X^2 - 3X) \\ &\qquad + 2X(\lambda P'(0) + \mu Q'(0)) + 2(\lambda P(0) + \mu Q(0)). \\ &= \lambda \left(-\frac{1}{6}P^{(3)}(0) \cdot (X^3 - X^2 - 2X) - \frac{1}{2}P''(0) \cdot (X^2 - 3X) + 2XP'(0) + 2P(0) \right) \\ &\qquad + \mu \left(-\frac{1}{6}Q^{(3)}(0) \cdot (X^3 - X^2 - 2X) - \frac{1}{2}Q''(0) \cdot (X^2 - 3X) + 2XQ'(0) + 2Q(0) \right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

f est bien une application linéaire, donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On détermine les coordonnées de $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ et $f(X^3)$ dans la base $\mathcal{B}$:
   - $f(1) = 2$, donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(2, 0, 0, 0)$.
   - $f(X) = 2X$, donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, 2, 0, 0)$.
   - $f(X^2) = -X^2 + 3X$, donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, 3, -1, 0)$.
   - $f(X^3) = -X^3 + X^2 + 2X$, donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, 2, 1, -1)$.

   Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = [f]_{\mathcal{B}} = \left[f(1)|f(X)|f(X^2)|f(X^3)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On montre que c'est une famille libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X(X-1) + \lambda_4 X(X-1)(X-2) = 0.$$
   On dérive 3 fois, on obtient $6\lambda_4 = 0$, d'où $\lambda_4 = 0$. En considérant alors la dérivée seconde de l'expression, on obtient $2\lambda_3 = 0$, d'où $\lambda_3 = 0$. Il reste $\lambda_1 + \lambda_2 X = 0$. Par identification des coefficients (ou en continuant à dériver), $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   La famille est donc libre. Elle est de cardinal 4 dans un espace de dimension 4, donc c'est une base.

4. Notons b_1, b_2, b_3, b_4 les quatre vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Les colonnes de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ sont constituées des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Or :
$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \cdot 1, \\ b_2 &= 1 \cdot X, \\ b_3 &= -1 \cdot X + 1 \cdot X^2, \\ b_4 &= 2 \cdot X - 3 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3. \end{aligned} \qquad \text{Ainsi,} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Soit on calcule $B = P^{-1}AP$ (cela donne un peu de calcul !), soit on y va directement : on exprime les coordonnées de $f(b_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$:
   - $f(b_1) = f(1) = 2 = 2b_1$;
   - $f(b_2) = f(X) = 2X = 2b_2$;
   - $f(b_3) = f(X(X-1)) = f(X^2) - f(X) = -X^2 - X = -b_3$;
   - $f(b_4) = f(X(X-1)(X-2)) = f(X^3 - 3X^2 + 2X) = -X^3 + 4X^2 - 3X = b_3 - b_4$.

   Par conséquent, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Soit $C = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors B est la matrice suivante, écrite par blocs : $B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Par conséquent, $B^n = \begin{pmatrix} C^n & 0 \\ 0 & D^n \end{pmatrix}$. Il suffit donc de calculer C^n et D^n.

   D'une part $C^n = (2I_2)^n = 2^n I_2$.

   D'autre part, $D = J - I_2$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, J et I_2 commutent : on peut utiliser la formule du binôme. Ainsi :
$$D^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k I_2^{n-k}.$$
   Or, un calcul facile montre que $J^2 = 0$. Ainsi, seuls les termes correspondant à $k = 0$ et $k = 1$ de la somme sont non nuls, et
$$D^n = (-1)^n I_2 + (-1)^{n-1} nJ = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} \cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'expression de B^n :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour en déduire A^n, on se souvient que d'après les formules de changement de base, $B = P^{-1}AP$, donc $A = PBP^{-1}$, puis $A^n = PB^nP^{-1}$. On a déjà déterminé P. Il faut calculer P^{-1}. Soit on y va par les calculs (ce n'est pas si long que cela), soit on se rappelle que P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Ainsi, il faut exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} &1 = b_1, \\ &X = b_2, \\ &X^2 = X(X-1) + X = b_1 + b_2, \\ &X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X = b_3 + 3b_2 + b_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste qu'à calculer A^n :

$$\begin{aligned} A^n = PB^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n(n+1) \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^n n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$