Algèbre 4 – Diagonalisation

Correction de l'exercice 2 –

1. $M_1 = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $M_2 = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Non diagonalisable. On a $M_3 = PJP^{-1}$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
   (par exemple !)
   Pour trouver cela, par analyse synthèse, la base (b_1, b_2, b_3, b_4) doit vérifier : $b_1, b_2 \in E_1$, $b_4 \in \operatorname{Ker}((f - 2\mathrm{id})^2) \setminus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id})$, et $b_3 = (f - 2\mathrm{id})(b_4)$.
4. $M_4 = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 7 –

1. A est non nulle, donc $\operatorname{rg}(A) > 0$. De plus, les colonnes de A sont toutes égales, donc $\operatorname{rg}(A) \leqslant 1$. Ainsi, $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = 1$.
   L'image de f est engendrée par les colonnes de A, donc :
   $$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right).$$
   Ce vecteur étant non nul, on en déduit que $\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
   D'après le théorème du rang, $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 3. De plus, on a les relations suivantes sur les colonnes de A :
   $$C_1 - C_2 = 0 \qquad C_1 - C_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad C_1 - C_4 = 0.$$
   Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans $\operatorname{Ker} f$. Ils forment une famille libre (car ils sont échelonnés).
   Ainsi,
   $$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
   est une famille libre de $\operatorname{Ker} f$ de cardinal 3 égal à la dimension de $\operatorname{Ker} f$. Donc c'en est une base.
2. Tout d'abord, 0 est valeur propre, puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Les vecteurs propres associés sont les vecteurs non nuls de $\operatorname{Ker} f$, qu'on a décrit plus haut.
   Soit λ une valeur propre non nulle, et X un vecteur propre associé. Alors $f(X) = \lambda X$, donc $\lambda X \in \operatorname{Im} f$. Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit que $X \in \operatorname{Im} f$, donc que $[X]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Dans ce cas, tout vecteur (non nul) de $\mathbb{C}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ est

vecteur propre (de A) associé à λ, donc par exemple $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ lui même. Or,

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(2a+2) \\ 2a+2 \\ 2a+2 \\ a(2a+2) \end{pmatrix} = (2a+2) \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Donc $\lambda = 2a+2$. Ainsi :

- si $2a+2 \neq 0$ (donc si $a \neq -1$), on a une et une seule valeur propre différente de 0, égale à $2a+2$; les vecteurs propres associés sont les vecteurs non nuls de $\mathbb{C} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$;
- si $a = -1$, il n'existe pas d'autre valeur propre que 0.

3. Par conséquent :
   - Si $a = -1$, $\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$ et $\dim E_0 = 3 \neq 4$, donc A n'est pas diagonalisable.
   - Si $a \neq -1$, $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 2a+2\}$, et $\dim E_0 + \dim E_{2a+2} = 3 + 1 = 4$, donc A est diagonalisable.
     De plus, on a décrit plus haut des bases des deux espaces propres (qui ne sont rien d'autre que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Ainsi, on a :

$$D = P^{-1}AP, \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} 2a+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 13 – *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$*, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.*

1. Cherchons les valeurs propres de A (réelles ou complexes), c'est-à-dire les valeurs λ pour lesquelles $A - \lambda I_4$ est non inversible. Pour cela, posons $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et effectuons un pivot sur $A - \lambda I_4$ afin d'échelonner cette matrice pour savoir si elle est inversible ou non.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2-\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - (2-\lambda)L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda(2-\lambda) & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \lambda(2-\lambda)L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2+\lambda^2(2-\lambda) & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + (2-\lambda^2(2-\lambda))L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda(2-\lambda^2(2-\lambda)) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda-1)^3(\lambda+1) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A - \lambda I_4$ est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire inférieure sont tous non nuls, donc si $(\lambda-1)^3(\lambda+1) \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$.

Vous remarquerez que j'ai préféré me ramener à une matrice triangulaire inférieure, afin d'exploiter au mieux les nombreux zéros présents dans la matrice initiale.

Pour déterminer si A est diagonalisable, il nous faut déterminer la dimension des espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1.

Espace propre E_{-1} :
D'après les opérations élémentaires ci-dessus, conservant le rang, on a :

$$\mathrm{rg}(A+I_4)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=3$$

Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $A+I_4$, on a $\dim E_{-1}=4-3=1$.

Espace propre E_1 :
De même, on a :

$$\mathrm{rg}(A-I_4)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=3$$

Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $A-I_4$, on a $\dim E_1=4-3=1$.

Par conséquent, $\dim E_1+\dim E_{-1}<4$, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2. **Base de** $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$**.**

On calcule $A-I_4=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&-2&0&1\end{pmatrix}$

Cette matrice n'est pas de rang 4 car 1 est valeur propre de A. De plus, la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$ est inversible, car triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls. Ainsi, ses trois premières colonnes, qui sont aussi les trois dernières colonnes de $A-I_4$, forment une famille libre. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(A-I_4)=3}$. Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(f-\mathrm{id})=1$. De plus, les colonnes de $A-I_4$ vérifient $C_1+C_2+C_3+C_4=0$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$, et comme cet espace est de dimension 1, $\boxed{\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$.

Base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$**.**

un calcul donne $(A-I_4)^2=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$

Les colonnes de cette matrice vérifient $C_2=C_4-2C_1$ donc $2C_1+C_2-C_4=0$, et $C_3=C_1-2C_4$, donc $C_1-C_3-2C_4=0$. Ainsi, les deux vecteurs $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ sont dans $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$. Comme ces deux vacteurs ne sont pas colinéaires, cet espace est au moins de dimension 2. Comme les deux premières colonnes de $A-I_4$ ne sont pas colinéaires, cette matrice est au moins de rang 2, donc $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$ est au plus de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$ est de dimension 2 exactement, donc $\boxed{\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)}$.

Base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^3$**.**

On a $(A-I_4)^3=\begin{pmatrix}-1&3&-3&1\\1&-3&3&-1\\-1&3&-3&1\\1&-3&3&-1\end{pmatrix}$ Toutes les lignes de cette matrice sont colinéaires à $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, donc cette matrice est de rang 1. Ainsi, la dimension de $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^3)$ est 3. Les trois relations sur les colonnes $3C_1+C_2=0$, $3C_1-C_3=0$ et $C_1+C_4=0$ fournissent 3 vecteurs de $\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^3)$. Ces trois vecteurs forment une famille libre (car échelonnée suivant la position de leur dernier coefficient non nul). Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$.

3. **Analyse :** Supposons que (b_1,b_2,b_3,b_4) soit une telle base. Alors :
   - $f(b_1)=b_1$, donc $b_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$;
   - $f(b_2)=b_1+b_2$, donc $b_1=(f-\mathrm{id})(b_2)$;
   - $f(b_3)=b_2+b_3$, donc $b_2=(f-\mathrm{id})(b_3)$;
   - $f(b_4)=-b_4$, donc $b_4\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$.

   Ainsi, le choix de b_3 détermine celui de b_1 et b_2, et est indépendant du choix de b_4. De plus, $(f-\mathrm{id})^2(b_3)=b_1\neq 0$, alors que $(f-\mathrm{id})^3(b_3)=0$, donc il va falloir choisir $f\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^3\setminus\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$.

   Synthèse :

   Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^3$, d'après la question précédente. De plus, il n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$, d'après la base trouvée pour cet espace (considérer les coordonnées 2 et 3 !) On pose alors :

$$\boxed{b_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}},\qquad \boxed{b_2=(f-\mathrm{id})(b_3)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}},\qquad \boxed{b_1=(f-\mathrm{id})(b_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}.$$

   De plus, il faut choisir b_4 dans $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. Or, $A+I_4=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&-2&0&3\end{pmatrix}$. On a une relation immédiate entre les colonnes : $C_1-C_2+C_3-C_4=0$, donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. Posons $\boxed{b_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}$.

   Montrons que (b_1,b_2,b_3,b_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, montrons que la matrice P de cette famille est inversible, en en trouvant une réduite de Gauss à l'aide de la méthode du pivot.

   On complète tout de suite les résultats en faisant les mêmes opérations sur la matrice I_4, puisque nous seront amenés à calculer l'inverse de cette matrice P pour le calcul de A^n.

$$P=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&1&1&0&0&0\\1&0&0&-1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&2&1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad L_1\leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\1&-1&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&2&1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad \begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4-L_1\end{array}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\0&-1&1&2&1&-1&0&0\\0&1&0&2&0&-1&1&0\\0&2&1&0&0&-1&0&1\end{array}\right)\qquad L_2\leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\0&1&0&2&0&-1&1&0\\0&-1&1&2&1&-1&0&0\\0&2&1&0&0&-1&0&1\end{array}\right)\qquad \begin{array}{l}L_3\leftarrow L_3+L_2\\L_4\leftarrow L_4-2L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\0&1&0&2&0&-1&1&0\\0&0&1&4&1&-2&1&0\\0&0&1&-4&0&1&-2&1\end{array}\right)\qquad L_4\leftarrow L_4-L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

On obtient une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux non non nuls, donc inversible. Les opérations élémentaires conservant le rang, la matrice P est inversible, donc $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base. Dans cette base, la matrice de f est la matrice M donnée dans l'énoncé, puisque, par construction, $f(b_1) = b_1$, $f(b_2) = b_2 + b_1$, $f(b_3) = b_3 + b_2$ et $f(b_4) = -b_4$.

4. On décompose M en $M = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, et :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 3,\ N^n = 0.$$

De plus, on vérifie aisément que $DN = N = ND$, donc N et D commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2}N^2.$$

Un calcul facile montre que $D^{n-1}N = N$ et $D^{n-2}N^2 = N^2$ (récurrence à partir de $DN = N$, ou directement). Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = D^n + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = M^n}.$$

D'après la formule de changement de base, on a $A = PMP^{-1}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PMP^{-1}PMP^{-1} \cdots PMP^{-1} = PM^nP^{-1}.$$

Terminons le calcul de P^{-1}, en reprenant le pivot à l'endroit on nous l'avions laissé dans la question précédente :

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 + L_4 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_4 \\ L_1 \leftarrow 8L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

En effectuant pour finir $L_1 \leftarrow \frac{1}{8}L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$ et $L_4 \leftarrow -\frac{1}{8}L_4$, on obtient :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Une vérification rapide montre qu'on a bien $P^{-1}P = I_4$, donc nos calculs sont corrects.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Nous laisserons le résultat sous cette forme. Même si l'énoncé semble dire de calculer ce produit, ne vous laissez pas prendre au piège : vous risquez de perdre une demi-heure en calculs stériles, vous avez plus intéressant à faire.

Correction de l'exercice 14 – (EDHEC 1997)

1. On a :
$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3.$$
Ainsi, $g \circ f$ est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le cours, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire, donc $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. (a) Soit $x \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Alors
$$\exists y \in \mathbb{R}^3, \quad x = g \circ f(y) = g(f(y)).$$
Ainsi, x est l'image par g de $f(y)$, donc $x \in \operatorname{Im}(g)$. D'où l'inclusion $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

   (b) En appliquant le théorème du rang à g, on a :
$$\dim \operatorname{Im}(g) + \dim \operatorname{Ker}(g) = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$
Comme $\dim \operatorname{Ker}(g) \geqslant 0$, il en résulte que $\dim \operatorname{Im}(g) \leqslant 2$.

   (c) De plus, d'après 2(a), l'inclusion des espaces amenant une inégalité sur leurs dimensions :
$$\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\operatorname{Im}(g)) \leqslant 2.$$

   (d) • Puisque $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on a :
$$\operatorname{Im}(g \circ f) \neq \mathbb{R}^3,$$
donc $g \circ f$ n'est pas surjective.
   • D'après le théorème du rang appliqué à $g \circ f$, l'inégalité de 2(c) amène :
$$\dim(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \geqslant 1,$$
donc $\operatorname{Ker}(g \circ f) \neq 0$, donc $g \circ f$ n'est pas injective.
En fait, un seul de ces deux arguments (et une justification idoine) suffit, puisque pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie, l'injectivité équivaut à la surjectivité.
3. On a donc $\operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de $g \circ f$, donc de BA.
4. (a) On a :
$$ABX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \neq 0.$$
Or, si $BX = 0$, on a aussi $ABX = 0$, ce qui contredit la ligne précédente. Donc $BX \neq 0$.

   (b) Soit λ une valeur propre de AB. Il existe alors $X \neq 0$ tel que
$$ABX = \lambda X, \qquad \text{donc:} \qquad BA(BX) = \lambda(BX).$$
Or, puisque $X \neq 0$, d'après la question 4(a), $BX \neq 0$. Ainsi, BX est un vecteur propre de BA associé à la valeur λ, donc λ est une valeur propre de BA.

   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de AB si et seulement si $AB - \lambda I_2$ est non inversible, donc si et seulement si
$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$
donc si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0$. Ainsi, $\operatorname{Sp}(AB) = \{-1, 1\}$.
D'après la question 4(b), 1 et -1 sont donc aussi valeurs propres de BA. Comme 0 est également valeur propre de BA d'après la question 3, il en résulte que BA, matrice d'ordre 3, admet 3 valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

Correction de l'exercice 15 – (EDHEC 2005)

1. (a) La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (donc une forme linéaire). Ainsi, $\operatorname{Im}(tr)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, donc est de dimension 0 ou 1. La trace étant une application non nulle (par exemple $\operatorname{tr} I_n = n \neq 0$, on en déduit que $\operatorname{Im} \operatorname{tr} \neq \{0\}$, donc $\dim \operatorname{Im} tr = 1$. Ainsi, on a une inclusion $\operatorname{Im} tr \subset \mathbb{R}$, avec égalité des dimensions (finies), donc $\operatorname{Im} \operatorname{tr} = \mathbb{R}$.

(b) D'après la formule du rang, l'espace de départ étant de dimension finie, on a :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Im} \operatorname{tr} + \dim \operatorname{Ker} \operatorname{tr}, \qquad \text{donc:} \qquad \dim \operatorname{Ker} \operatorname{tr} = n^2 - 1.$$

(c) Soit $M \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect}(I)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I$. Alors

$$\operatorname{tr} M = \lambda \operatorname{tr} I = \lambda n.$$

De plus, $M \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$, donc $\lambda n = 0$, donc $\lambda = 0$ (car par hypothèse $n \geqslant 2$) Ainsi, $M = 0$. On a donc $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect}(I) \subset \{0\}$, et comme l'inclusion réciproque est immédiate, puisque ce sont des sous-espaces vectoriels, on en déduit l'égalité :

$$\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect}(I) = \{0\}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} + \operatorname{Vect}(I) = \operatorname{Ker} \operatorname{tr} \oplus \operatorname{Vect}(I)$. On a alors

$$\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \oplus \operatorname{Vect}(I)) = \dim \operatorname{Ker} \operatorname{tr} + \dim \operatorname{Vect}(I) = n^2 - 1 + 1 = n^2.$$

On a donc une inclusion $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \oplus \operatorname{Vect}(I) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec égalité des dimensions. Ainsi, on a l'égalité

$$\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \oplus \operatorname{Vect}(I) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe

$$f(M) = M + \operatorname{tr}(M)I.$$

(a) Tout d'abord, f est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Montrons que cette application est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$f(\lambda M + N) = (\lambda M + N) + \operatorname{tr}(\lambda M + N)I = \lambda M + N + (\lambda \operatorname{tr} M + \operatorname{tr} N)I,$$

par linéarité de la trace (inutile de justifier cette linéarité, elle est implicitement admise dans l'énoncé, lors de la définition de la trace) Ainsi,

$$f(\lambda M + N) = \lambda(M + \operatorname{tr}(M)I) + N + \operatorname{tr}(N)I = \lambda f(M) + f(N).$$

Ainsi, f est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc un endormorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit λ une valeur propre de f, et $M \neq 0$. Alors M est dans E_λ si et seulement si $M + \operatorname{tr}(M)I = \lambda M$, donc $(1-\lambda)M = (\operatorname{tr} M)I$.

Une telle égalité est possible :

- soit si M et I sont colinéaires, donc $M \in \operatorname{Vect}(I)$. Or, pour tout $l \in \mathbb{R}$, $f(\lambda I) = (n+1)\lambda I$, donc dans ce cas, $\lambda = n+1$, et $\operatorname{Vect}(I) \subset E_{n+1}$;
- soit $1 - \lambda = 0$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$, donc $\lambda = 1$ et $M \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$. On vérifie facilement que pour tout $M \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$, on a effectivement $f(M) = M$, donc, comme $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \neq \{0\}$, 1 est valeur propre de f, et $\operatorname{Ker} \operatorname{tr} \subset E_1$.

Ainsi, $\operatorname{Sp}(f) = \{1, n+1\}$, et $\dim(E_1) \geqslant n^2 - 1$ et $\dim(E_2) \geqslant 1$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder la dimension totale n^2 (car les sous-espaces propres sont en somme directe), on en déduit que $\dim(E_1) = n^2 - 1$ et $\dim E_2 = 1$. La somme de ces dimensions étant égale à la dimension totale n^2, f est diagonalisable.

Comme 0 n'est pas valeur propre de f, on en déduit que f est un automorphisme.

3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe

$$g(M) = M + \operatorname{tr}(M)J$$

où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont la trace est nulle.

On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} g \circ g(M) - 2g(M) + M &= g(M + \operatorname{tr}(M)J) - 2M - 2\operatorname{tr}(M)J + M \\ &= g(M) + \operatorname{tr}(M)g(J) - M - 2\operatorname{tr}(M)J \\ &= M + \operatorname{tr}(M)J + \operatorname{tr}(M)(J + \operatorname{tr}(J)J) - M - 2\operatorname{tr}(M)J = 0, \end{aligned}$$

car $\operatorname{tr}(J) = 0$.

Ainsi, $g^2 - 2g + \mathrm{id}$ est l'endomorphisme nul, donc $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

(b) Puisque $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g, on a $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathrm{rac}(X^2 - 2X + 1) = \{1\}$.
De plus, le calcul précédent montre que $g(J) = J$, donc $1 \in \mathrm{Sp}(g)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$. Donc 1 est la seule valeur propre de g.
Attention, cet énoncé affirme l'unicité mais aussi l'existence d'une valeur propre ! N'oubliez pas de montrer que 1 est effectivement valeur propre de g.

(c) L'endomophisme g ne possède qu'un valeur propre, égale à 1. Si g était diagonalisable, il serait donc égal à l'homothétie de rapport 1, donc à l'identité. Or

$$g(I) = I + \mathrm{tr}(I)J = I + nJ \neq I,$$

car $J \neq 0$. Donc g n'est pas l'identité. Donc g n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 19 – La base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$. On rappelle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$, $f(X^3)$ et $f(X^4)$. Soit $i \in [\![0, 4]\!]$, on a :

$$f(X^i) = (X+1)^i - i(i-1)X^{i-1},$$

donc :
- $f(1) = 1$
- $f(X) = X + 1$
- $f(X^2) = (X+1)^2 - 2X = X^2 + 1$
- $f(X^3) = (X+1)^3 - 6X^2 = X^3 - 3X^2 + 3X + 1$
- $f(X^4) = (X+1)^4 - 12X^3 = X^4 - 8X^3 + 6X^2 + 4X + 1$

Nous obtenons donc $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux. Ainsi, M (donc f aussi) n'a qu'une valeur propre, égale à 1. Par conséquent, si M était diagonalisable, la seule valeur propre étant 1, M serait semblable à la matrice identité, donc égale à la matrice identité, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, M n'est pas diagonalisable, donc f non plus.