

Algèbre 5 – Diagonalisation : pour aller plus loin

Correction de l'exercice 3 – Résolution d'une récurrence simultanée (d'après ESC option technologique, un peu arrangé)

1. Puissances de la matrice A

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ est l'ensemble des solutions du système $(A - \lambda I_3)X = 0$. Effectuons donc un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I_3$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} - \lambda & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 - \lambda & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ -15 - 6\lambda & 18 & 9 \\ -3 & 6 & 1 - 2\lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (5 + 2\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ 0 & 2(\lambda + 1)(2\lambda - 1) & -6 - 6\lambda \\ 0 & 2 + 2\lambda & -2 - 2\lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ 0 & 1 + \lambda & -(1 + \lambda) \\ 0 & (1 + \lambda)(2\lambda - 1) & -3(1 + \lambda) \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - (2\lambda - 1)L_2 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ 0 & 1 + \lambda & -(1 + \lambda) \\ 0 & 0 & 2(1 + \lambda)(2 - \lambda) \end{pmatrix} = M_\lambda \end{aligned}$$

- La réduite de Gauss obtenue est non inversible si et seulement si un des coefficients diagonaux est nul, donc si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$. Ainsi, $\text{Sp}(A) = -1, 2$.

Ainsi, $A - \lambda I_3$ est inversible, puis $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = \{0\}$.

- Si $\lambda = -1$, la matrice obtenue par la méthode du pivot est $M_{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1, donc, d'après la formule du rang, l'espace propre E_{-1} est de dimension 2. De plus, les colonnes de M_{-1} vérifient $2C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$, ainsi les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_{-1} , et ne sont pas

colinéaires. Comme E_{-1} est de dimension 2, $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_{-1} .

- Si $\lambda = 2$, la matrice obtenue à l'issue du pivot est $M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 2, donc E_2 est de dimension 1. Les colonnes de M_2 vérifient $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$, et E_2 étant de dimension 1,

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque les sous-espaces propres sont en somme directe, la famille obtenue en juxtaposant les bases des sous-espaces propres est une famille libre. Pour des raisons de cardinalité, il en résulte que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de l'endomorphisme f canoniquement associé à A est, dans cette base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

Ainsi, d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes, on a $A = PDP^{-1}$, où P est la matrice de changement de base donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons P^{-1} par la méthode du pivot, en effectuant simultanément les opérations sur la matrice I_3 :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Vérifiez votre calcul en faisant le produit $P \cdot P^{-1}$ ou $P^{-1} \cdot P$. Cela permet de détecter d'éventuelles erreurs de calcul

(b) On en déduit que $A = PDP^{-1}$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = P(DP^{-1}P)^{n-1}DP^{-1} = PD^{n-1}DP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Or, D étant diagonale, ses puissances successives sont immédiates à calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(-1)^n & (-1)^n & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ 0 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2^{n+1} & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vérifiez rapidement que cette formule convient pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. Suites « arithmético-géométriques » dans $\mathbb{R}^3$.

(a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

(b) On sait déjà que $I_3 - A$ est inversible, car 1 n'est pas valeur propre de A (voir calculs de $\text{Ker}(f - \lambda id)$). Soit $M = 2(I_3 - A)$. Calculons l'inverse de M par la méthode du pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 10L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 + 6L_3 \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & -20 & 0 & 9 & -8 & -3 \\ 0 & -20 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & 0 & 12 & -9 & -9 \\ 0 & -20 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{2}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -2L_3 \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & 8 & -6 & -6 \\ 0 & 20 & 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 20 & 6 & -12 & -2 \end{array} \right) \\
\text{Ainsi, } M^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 6 & -12 & -2 \end{pmatrix}, \text{ donc}
\end{aligned}$$

$$(I_3 - A)^{-1} = 2M^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 6 & -12 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) On cherche un vecteur U tel que $U = AU + B$, donc tel que $(I_3 - A)U = B$. Ainsi :

$$U = (I_3 - A)^{-1}B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 6 & -12 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{soit: } U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encore une fois, prenez le temps de vérifier rapidement que l'on a bien l'identité voulue $U = AU + B$.

(d) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - U$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = X_{n+1} - U = AX_n + B - U = AX_n + B - (AU + B) = A(X_n - U) = AY_n.$$

Par une récurrence immédiate, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = A^n Y_0, \quad \text{puis:} \quad X_n = Y_n + U = A^n Y_0 + U = A^n(X_0 - U) + U.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2^{n+1} & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2^{n+1} & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n \\ -(2^n - (-1)^n) \\ -(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n \\ -(2^n - (-1)^n) + 2 \\ -(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vérifiez la cohérence de la formule obtenue pour $n = 0$. Nous avons donc explicité les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n \\ -(2^n - (-1)^n) + 2 \\ -(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 5 – (HEC 2010)

1. CNS : une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.
2. (a) Le système $MX = aX$ fournit :

$$(1-a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad x_i = ax_{i-1}.$$

Si $x_n = 0$, on obtient facilement $X = 0$, et si $x_n \neq 0$, $x_i = a^{n-i}x_n$, et par substitution dans la première équation, $(-a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1)x_n = 0$, et cela n'est possible que si $-a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1 = 0$. Ainsi, le système admet une solution non triviale si et seulement si λ est racine du polynôme $X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - 1$.

- (b) La fin de la résolution du système précédente amène alors sans difficulté

$$E_a = \mathbb{R} \begin{pmatrix} a^{n-1} \\ \vdots \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) $P_k(1) \neq 0$, donc

$$P_k(x) = 0 \iff x^k = 1 + x + \cdots + x^{k-1} = \frac{1-x^k}{1-x} \iff x^{k+1} - 2x^k + 1 = f(x)$$

On a pour tout x , $f'(x) = x^{k-1}((k+1)x - 2k)$, donc il existe $\beta > 1$ tel que f est décroissante sur $]1, \beta[$, et croissante sur $]\beta, +\infty[$. Comme $f(1) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit l'existence et l'unicité de a_k par le théorème de la bijection sur $]\beta, +\infty[$.

- (b) $P_{k+1}(a_k) = P_{k+1}(a_k) - P_k(a_k) = a_k^{k+1} - 2a_k^k = -1$ (d'après l'équation trouvée dans la question précédente). Ainsi, $P_{k+1}(a_k) < 0$, donc, d'après le signe de P_{k+1} (négatif sur $]1, \alpha_{k+1}[$ et positif sur $]a_k, +\infty[$), $a_k < a_{k+1}$. Donc la suite (a_k) est croissante. Par ailleurs, la fonction f de la question précédente vérifie $f(2) = 1$, de même signe que la limite en $+\infty$. Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]1, +\infty[$, il vient alors $a_k < 2$ (sinon on applique 2 fois le TVI entre 2 et a_k , et entre a_k et $+\infty$ et on obtient une contradiction).

Ainsi, (a_k) est croissante, majorée par 2. Elle converge donc.

En revenant à l'équation de la question précédente, que l'on divise par a_k^k , il vient :

$$0 \leq 2 - a_k = \frac{1}{a_k^k} \leq \frac{1}{a_2^k},$$

par croissance et donc, puisque $a_2 > 1$, on a convergence de (a_k) vers 2, par le théorème d'encadrement.

4. (a) Soit $k = 2p$. On voit facilement que f' est de signe constant positif sur $\mathbb{R}_-$, donc f est strictement croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$, et $f(0) = 1$. D'où l'existence et l'unicité de b_p par le théorème de la bijection.

- (b) $P_{2p+2}(b_p) - P_{2p}(b_p) = b_p^{2p+2} - b_p^{2p+1} - 2b_p^{2p} = b_p^{2p}(b_p^2 - b_p - 2)$.

Le polynôme $X^2 - X - 2$ admet deux racines -1 et 2 , et de plus, $P_{2p}(-1) = 1$, de même signe que la limite en $-\infty$. Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que $b_p \in]-1, 0[$, donc se situe entre les 2 racines du polynôme. Donc

$$P_{2p+2}(b_p) = P_{2p+2}(b_p) - P_{2p}(b_p) < 0.$$

Comme P_{2p+2} est (sur $\mathbb{R}_-$) positive à gauche de b_{p+1} et négative à droite, $b_p > b_{p+1}$.

Ainsi, (b_p) est décroissante, minorée par -1 , donc converge.

Soit $\ell = \lim b_p$. Si $\ell \neq -1$, alors $-1 < \ell < 0$, et comme $b_p > \ell$, on en déduit que $\lim b_p^{2p} = \lim b_p^{2p+1} = 0$. Ainsi, on obtient une contradiction en passant à la limite dans l'équation $b_p^{2p+1} - 2b_p^{2p} + 1 = 0$.

Donc $\ell = -1$.

- (c) On a alors $b_p^{2p}(b_p - 2) = -1$, donc $b_p^{2p} = -\frac{1}{b_p - 2} \rightarrow \frac{1}{3}$.

Ainsi, $2p \ln |b_p| \rightarrow \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$, et comme $|b_p| \rightarrow 1$, $\ln |b_p| \underset{+\infty}{\sim} |b_p| - 1 = -b_p - 1$. On obtient donc

$$b_p + 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 3}{2p}.$$

5. (a) • Soit $Q(X) = X^{n+1} - 2X^n + 1$. Les valeurs propres de M_n sont les racines de Q différentes de 1. Le polynôme Q' admet une unique racine non nulle, égale à $2 - \frac{2}{n+1} > 1$.
Donc Q est monotone sur $[0, 1]$, et $Q(0) = 1$, $Q(1) = 0$. Donc Q n'admet pas de racine sur $[0, 1[$.
• D'après l'étude de (a_k) , Q possède une seule racine sur $]1, +\infty[$

- Si n est pair, Q possède une seule racine sur $\mathbb{R}_-$. Si n est impair, alors Q est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}_-$, donc n'admet pas de racine

Ainsi, Q admet au plus 2 racines différentes de 1, donc M_n admet au plus 2 valeurs propres. Comme d'après ce qui précède, les espaces propres sont de dimension 1, M_n ne peut pas être diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sauf si $n = 2$. Dans ce dernier cas a_2 et b_1 sont deux valeurs propres distinctes : la matrice étant d'ordre 2, elle est diagonalisable.

- (b) Q'_n admet comme uniques racines 0 et $\frac{2n}{n+1}$. Or, 0 n'est pas racine de Q_n et

$$Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = -\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{2}{n+1} + 1.$$

Ainsi, $Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 0$ si et seulement si

$$2^{n+1}n^n = (n+1)^{n+1}.$$

Or, si $n \geq 2$, alors n et $n+1$ n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1, car un tel diviseur serait aussi un diviseur de leur différence. Ainsi, n est premier avec $n+1$, et donc avec $(n+1)^{n+1}$, donc n ne divise pas $(n+1)^{n+1}$, ce qui contredit l'équation précédente. Ainsi, on ne peut pas avoir $Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 0$.

Par conséquent, Q_n n'a que des racines simples (aucune de ses racines n'est racine de Q'_n). Ainsi, Q_n admet dans $\mathbb{C}$ $n+1$ racines distinctes, dont 1, donc admet n racines 2 à 2 distinctes différentes de 1. Ainsi, M_n admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes sur $\mathbb{C}$, donc M_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, pour toute valeur de n .

Correction de l'exercice 6 –

Partie I – Diagonalisation de s

1. Généralités sur s .

- (a) Par définition même, s est définie pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et $s(Q)$ est un polynôme de degré au plus $2n$, donc élément de $\mathbb{C}[X]$. Il reste donc à montrer que s est une application linéaire.

Soit P et Q dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons : $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$.

Alors : $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{2n} (\lambda a_k + b_k) X^k$, donc $s(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{2n} (\lambda a_{2n-k} + b_{2n-k}) X^k$.

De plus : $\lambda s(P) + s(Q) = \lambda \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k + \sum_{k=0}^{2n} b_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} (\lambda a_{2n-k} + b_{2n-k}) X^k$.

Ainsi, $\lambda s(P) + s(Q) = s(\lambda P + Q)$. Donc s est une application linéaire.

- (b) La base canonique de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ est b.c. = $(1, X, \dots, X^{2n})$. Déterminons donc $s(X^i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$: $\forall i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, s(X^i) = X^{2n-i}$.

$$\text{Ainsi : } [s]_{b.c.} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}).$$

2. Diagonalisation dans le cas particulier $n = 1$

- (a) Si $n = 1$, $[s]_{b.c.} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Alors : $M = [s]_{b.c.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I_3$ pour savoir à quelle condition sur λ cette matrice n'est pas inversible (et donc λ est une valeur propre de M).

$$\begin{aligned} M - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}. & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice, qui est triangulaire, est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$. Ainsi, $M - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si $\lambda = \pm 1$. On en déduit que $\text{Spec}(s) = \text{Spec}(M) = \{-1, 1\}$.

- (c) Déterminons E_{-1} . Le résultat du pivot précédent montre que E_{-1} est l'ensemble des solutions du système donné

par la matrice : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est échelonnée de rang 2, donc E_{-1} est de dimension $3 - 2 = 1$,

d'après le théorème du rang. Cette information suffirait s'il ne s'agissait que de prouver la diagonalisabilité de M . Comme on veut la diagonalisation effective, on va chercher une base de E_{-1} . La troisième variable étant

paramètre libre, on obtient une base de E_{-1} en considérant le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons E_1 . Le résultat du pivot précédent montre que E_1 est l'ensemble des solutions du système donné

par la matrice : $M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est échelonnée de rang 1, donc E_1 est de dimension $3 - 1 = 2$, d'après le théorème du rang. On peut donc dès à présent conclure que M est diagonalisable, puisque $\dim E_{-1} + \dim E_1 = 3$. On trouve :

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Par conséquent, $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (d) Cela est un peu redondant avec la question précédente, et a pour seul but de bien faire le lien entre diagonalisa-

tion des matrices et diagonalisation des endomorphismes. Une base possible est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, et la matrice de s dans cette base est D .

- (e) Trouvons pour commencer une racine k -ième D' de D dans $\mathbb{C}_3[X]$. Par exemple $D' = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors la

matrice d'un endomorphisme t convenable dans la base canonique est : $N = PD'P^{-1}$.

Calculons donc P^{-1} , à l'aide de l'algorithme du pivot, en effectuant les mêmes opérations sur les lignes de I_3 que les opérations faites pour passer de P à I_3 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{aligned} N = [t]_{bc} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{\frac{i\pi}{k}} & 0 & e^{\frac{i\pi}{k}} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{\frac{i\pi}{k}} & 0 & 1 - e^{\frac{i\pi}{k}} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 - e^{\frac{i\pi}{k}} & 0 & 1 + e^{\frac{i\pi}{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+e^{\frac{i\pi}{k}}}{2} & 0 & \frac{1-e^{\frac{i\pi}{k}}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1-e^{\frac{i\pi}{k}}}{2} & 0 & \frac{1+e^{\frac{i\pi}{k}}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Étude du cas général

- (a) Puisque par définition, $s^2 = s$ (ce qui définit une symétrie, soit dit en passant), ses valeurs propres sont solutions du polynôme $X^2 - X = 0$. En effet, soit x un vecteur propre (donc non nul) pour une valeur λ donnée, alors $s^2(x) = s(\lambda x) = \lambda s(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda^2 x = \lambda x$, puis $\lambda^2 = \lambda$, puisque $x \neq 0$ (démonstration à refaire rapidement, surtout si elle apparaît en première moitié de copie).
Ainsi, $\text{Spec}(s) \subset \{-1, +1\}$. D'autre part, $s(X^n) = X^n$, et $s(1 - X^{2n}) = X^{2n} - 1$. Donc X^n est vecteur propre associé à 1, et $1 - X^{2n}$ est vecteur propre associé à -1 . Cela prouve que 1 et -1 sont des valeurs propres.

(b) Pour commencer : $M + I_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$

Cette matrice possède une symétrie dans ses colonnes : $C_1 - C_{2n+1} = 0$, $C_2 - C_{2n} = 0$ etc. Cela fournit n vecteurs de E_{-1} : $X^i - X^{2n-1}$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ces vecteurs forment une famille libre (famille dont les degrés sont échelonnés).

De même, $M - I_{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & & -1 \end{pmatrix}$

Cette matrice possède une anti-symétrie dans ses colonnes : $C_1 + C_{2n+1} = 0$, $C_2 + C_{2n} = 0$ etc. Cela fournit n vecteurs de E_1 : $X^i + X^{2n-1}$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ainsi qu'un $n+1$ -ième qu'on a déjà donné X^n . Ces $n+1$ vecteurs forment une famille libre.

On en déduit que $\dim E_1 + \dim E_{-1} \geq 2n+1$, et comme E_1 et E_{-1} sont en somme directe dans $\mathbb{C}^{2n+1}$, $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 2n+1$. Cela montre que M est diagonalisable, et de surcroît, $\dim E_{-1} = n$ et $\dim E_1 = n+1$. Ainsi, les familles libres décrites sont des bases des espaces propres.

- (c) Une base de vecteurs propres de s est donc : $\mathcal{B} = ((X^i - X^{2n-1})_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}, X^n, (X^i + X^{2n-1})_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket})$.

Dans cette base, la matrice de s est : $D = [s]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

cette matrice ayant n facteurs digonaux égaux à -1 et $n+1$ facteurs diagonaux égaux à 1.

- (d) M est la matrice de s dans la base canonique. On a donc donné sa diagonalisation dans la question précédente : $M = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & -1 & 1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ -1 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouvons des racines k -ième de la matrice D . Toute matrice diagonale D' dont les coefficients sont des racines k -ièmes des coefficients diagonaux de D convient. On a le choix, pour chaque coefficient diagonal, égal à ± 1 , entre k racines distinctes. Cela fournit donc k^{2n+1} racines distinctes de D , puisqu'il y a $2n+1$ coefficients diagonaux :

$$D' = \begin{pmatrix} e^{\frac{(2\ell_1+1)i\pi}{k}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\frac{(2\ell_n+1)i\pi}{k}} & \\ \vdots & & & e^{\frac{(2\ell_{n+1})i\pi}{k}} \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & e^{\frac{(2\ell_{2n+1})i\pi}{k}} \end{pmatrix}, \quad (\ell_1, \dots, \ell_{2n+1}) \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket^{2n+1}.$$

On trouve donc k^{2n+1} matrices N telles que $N^k = M$, données par $N = PD'P^{-1}$, pour toutes les matrices D' décrites ci-dessus (ne faites bien sûr pas le calcul, laissez sous cette forme !). Ces matrices N sont deux à deux distinctes, puisque les matrices $P^{-1}NP = D'$ sont deux à deux distinctes.

Correction de l'exercice 7 – Racines carrées d'une matrice (extrait de CCP 2004)

1. Exemple 1.

- (a) Cherchons pour commencer les valeurs propres de A . Pour cela, cherchons à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible, à l'aide d'un pivot de Gauss :

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{pmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} & & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
 \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 11-\lambda & -5 & 5 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} & & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 5L_2 + (11-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
 \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & \lambda^2 - 14\lambda + 8 & 3\lambda - 8 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} & & \boxed{\text{si } \lambda \neq 0} \\
 & & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -\frac{1}{\lambda}L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} \\
 \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2 - 14\lambda + 8 & 3\lambda - 8 \end{pmatrix} & & L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda^2 - 14\lambda + 8)L_2 \\
 \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + 17\lambda - 16 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Si $\lambda = 0$, la matrice obtenue en troisième ligne est non inversible (une ligne nulle), donc 0 est valeur propre de A . De plus, si $\lambda \neq 0$, la matrice obtenue par le pivot est non inversible si et seulement si $\lambda^2 - 17\lambda + 16 = 0$, donc si $(\lambda - 1)(\lambda - 16) = 0$. Ainsi, 1 et 16 sont valeurs propres, et ce sont les seules valeurs propres non nulles. Par conséquent, $\text{Spec}(A) = \{0, 1, 16\}$.

On peut dès à présent en conclure que A est diagonalisable, puisqu'elle a trois valeurs propres, et est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De plus, les espaces E_0 , E_1 et E_{16} sont alors de dimension 1. Il suffit, pour en trouver une base, d'en trouver un vecteur non nul.

Base de E_0 : on peut revenir à la troisième ligne du système, ou alors, constater que la matrice A vérifie :

$$C_2 + C_3 = 0, \text{ donc } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_0. \text{ Ainsi, } E_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Base de E_1 : la matrice obtenue à l'issue du pivot est dans ce cas $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La troisième variable est

paramètre libre. Une base de E_1 est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Base de E_{16} : la matrice obtenue est dans ce cas $\begin{pmatrix} -5 & -13 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $E_{16} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres. Soit :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = PDP^{-1}$.

- (b) Calculons P^{-1} à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, en effectuant sur I_3 les mêmes opérations qu'on effectue sur P pour parvenir à l'identité.

$$\begin{array}{lcl}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
& & L_2 \leftarrow -L_2 \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right) & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\
& & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right) \\
& \text{Ainsi, } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Soit R telle que $R^2 = A$, et soit $S = P^{-1}RP$. Alors $S^2 = P^{-1}RPP^{-1}RP = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D$. Ainsi, S est une racine de D .

Réciproquement, soit R une matrice telle que $S = P^{-1}RP$ soit une racine de D . On obtient alors $R^2 = PSP^{-1}PSP^{-1} = PS^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Donc R est une racine de A .

(d) Soit S une racine carrée de D .

i. On a $DS = S^2 \cdot S = S^3$ et $SD = S \cdot S^2 = S^3$. Donc $DS = SD$.

ii. Supposons S non diagonale, et soit $s_{i,j}$, $i \neq j$, un coefficient non nul de S . On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coefficients diagonaux de D . Alors $(DS)_{i,j} = \lambda_i s_{i,j}$ et $(SD)_{i,j} = \lambda_j s_{i,j}$. Comme $SD = DS$, on obtient $\lambda_i s_{i,j} = \lambda_j s_{i,j}$, puis $\lambda_i = \lambda_j$, car $s_{i,j} \neq 0$, ce qui contredit le fait que $i \neq j$, et que les coefficients diagonaux de D sont deux à deux distincts.

Conclusion : S est diagonale. Ce raisonnement s'applique dès lors qu'on a n valeurs propres distinctes pour une matrice de taille $n \times n$. **À retenir !**

iii. Ainsi, S peut s'écrire sous la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{d'où} \quad S = R^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les réels μ_1, μ_2 et μ_3 vérifient $\mu_1^2 = 0$, $\mu_2^2 = 1$ et $\mu_3^2 = 16$, donc $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \pm 1$ et $\mu_3 = \pm 4$. On obtient donc quatre racines carrées de R , et d'après ce qui précède, ce sont les seules. L'ensemble des racines carrées de R est donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(e) D'après la question (1c), l'ensemble des racines de A est donc :

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} \right\}.$$

2. Exemple 2.

(a) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, et soit n son indice de nilpotence, c'est-à-dire le seul entier tel que $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$.

i. Question classique et vue plusieurs fois en TD! (vous aurez bien sûr rectifié le k en n)

Puisque $M^{n-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $M^{n-1}X \neq 0$ (l'application linéaire canoniquement associée n'est pas nulle!). Montrons que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ est libre. On montre par récurrence descendante sur $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ que $(M^k X, \dots, M^{n-1}X)$ est libre.

Initialisation : Puisque $M^{n-1}X$ est non nul, $(M^{n-1}X)$ est une famille libre.

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $(M^k X, \dots, M^{n-1}X)$ soit libre. Soit $(\lambda_{k-1}, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que

$$\lambda_{k-1}M^{k-1}X + \dots + \lambda_{n-1}M^{n-1}X = 0.$$

On exploite le fait que $M^n = 0$ en multipliant cette expression par M , ce qui fait partir le dernier terme :

$$\lambda_{k-1}M^kX + \dots + \lambda_{n-2}M^{n-1}X = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(M^kX, \dots, M^{n-1}X)$ étant libre, on obtient $\lambda_{k-1} = \dots = \lambda_{n-2} = 0$, puis $\lambda_{n-1}M^{n-1}X = 0$, donc $\lambda_{n-1} = 0$, puisque $M^{n-1}X \neq 0$. Par conséquent, $(M^{k-1}X, \dots, M^{n-1}X)$ est libre.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ est libre.

ii. C'est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$, de dimension 3. Son cardinal est donc au plus 3. Ainsi, $n \leq 3$.

(b) On trouve : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.

(c) Soit R une racine carrée de A . Alors $R^4 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R^6 = A^3 = 0$.

Par conséquent, R est nilpotente, mais $R^4 \neq 0$, donc son indice de nilpotence est supérieur ou égal à 5, ce qui contredit la question précédente. Ainsi, A n'admet pas de racine carrée.

(d) Soit plus généralement $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence n .

i. Il faut corriger l'inégalité en $2n - 1 > p$.

Le même raisonnement s'applique. L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est au plus égal à p (même démonstration!).

Ainsi, si $2n - 1 > p$, et si R est une racine de A , $A^{n-1} = R^{2n-2} \neq 0$, et $A^n = R^{2n} = 0$. Par conséquent, R est nilpotente, d'indice de nilpotence au moins égal à $2n - 1$, donc strictement supérieur à p , d'où une contradiction.

Donc A n'admet pas de racine carrée.

ii. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$. Alors B est nilpotente, d'indice de nilpotence p . Soit :

$$A = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors A est nilpotente puisque B l'est, et A admet au moins une racine carrée, par exemple B .

Correction de l'exercice 8 – (Extrait de Ecricome 1998)

1. F est définie sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue donc intégrable sur $[x, x+1]$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, et les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto x+1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après un théorème du cours,

$F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue et dérivable. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) = f(x+1) - f(x).$$

2. (a) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t) dt = -\frac{1}{2\pi} [\cos(2\pi t)]_x^{x+1} = -\frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi x + 2\pi) - \cos(2\pi x)) = 0.$$

(b) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1; \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$

• si $x < 0$,

$$F(x) = \int_x^{x+1} (1-t) dt = -\frac{1}{2}((1-x-1)^2 - (1-x)^2) = \frac{1}{2}(1-2x);$$

- si $0 \leq x \leq 1$, d'après la relation de Chasles

$$F(x) = \int_x^1 (1-t) dt + \int_1^{x+1} \sqrt{x-1} dt = \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}};$$

- si $x > 1$,

$$F(x) = \int_x^{x+1} \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right).$$

3. Tout d'abord, T est bien à valeurs dans E , puisque, d'après la question 1, pour tout $f \in E$, $T(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit f et g deux éléments de E , et λ un réel. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f + \lambda g)(x) = \int_x^{x+1} (f(x) + \lambda g(x)) dx = \int_x^{x+1} f(x) dx + \lambda \int_x^{x+1} g(x) dx = T(f)(x) + \lambda T(g)(x),$$

par linéarité de l'intégrale. Ainsi, $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$. Par conséquent, T est une application linéaire de E dans lui-même.

L'exemple 2(a) fournit une application f non nulle telle que $T(f) = 0$, donc $\text{Ker } T \neq \{0\}$. Ainsi, f n'est pas injective. De plus, pour tout $f \in E$, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et non dérivables sur $\mathbb{R}$ (par exemple la fonction valeur absolue). Ces fonctions sont donc dans E , mais pas dans l'image de T . Ainsi, T n'est pas surjective.

4. (a) On vient de voir que $\text{Ker } T \neq \{0\}$. Pour tout élément f non nul de $\text{Ker } T$ (et il en existe), on a $T(f) = 0 = 0 \cdot f$. Ainsi, 0 est valeur propre de T .

- (b) Soit pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

Calculons $T(f_a)$, pour $a \neq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at} dt = \frac{1}{a} [e^{at}]_x^{x+1} = \frac{1}{a} (e^{a(x+1)} - e^{ax}) = \frac{1}{a} (e^a - 1) e^{ax} = \frac{1}{a} (e^a - 1) f_a(x).$$

Ainsi, si $a \neq 0$, f_a (qui est non nul) est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda(a) = \frac{1}{a}(e^a - 1)$.

Lorsque $a = 0$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T(f_0)(x) = \int_x^{x+1} 1 dt = 1 = f_0(x),$$

Donc f_0 est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda(0) = 1$.

D'après les limites remarquables, la fonction λ est continue en 0.

- (c) λ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}.$$

Soit $g : x \mapsto (x-1)e^x + 1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = xe^x$. Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant pour g' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1	0	$+\infty$

Ainsi, g est positive, donc aussi λ' sur $\mathbb{R}^*$. On obtient le tableau de variations suivant pour λ :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lambda'(x)$	+		+
$\lambda(x)$	0	1	$+\infty$

La fonction λ étant continue (y compris en 0, comme on l'a indiqué plus haut), et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur $\mathbb{R}$), on en déduit, d'après le théorème de la bijection, que λ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]0, +\infty[$. Ainsi, tout réel strictement positif est dans l'image de λ , donc est valeur propre de T . Comme 0 est aussi valeur propre de T d'après la question 4(a), on en déduit que tout réel positif est valeur propre de T .

Correction de l'exercice 9 –

1. (a) Les valeurs propres de M sont les complexes λ tels que $M - \lambda I_4$ n'est pas inversible, donc tels que le système $MX = \lambda X$ ne soit pas de Cramer. Résolvons ce système. Pour cela, on effectue un pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I_4$ pour en trouver une réduite de Gauss.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} & L_3 \leftrightarrow L_4 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_3 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$M - \lambda I_4$ est inversible si et seulement si sa réduite de Gauss est inversible, c'est à dire s'il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. C'est le cas si et seulement si $\lambda^2 \neq -1$. Ainsi, les valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$ sont les solutions de l'équation $\lambda^2 = -1$.

Ainsi, M n'a pas de valeurs propres réelles, et a deux valeurs propres complexes i et $-i$.

- (b) 0 n'est pas valeur propre de M , donc si f est canoniquement associée à M , $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Par conséquent, f est un endomorphisme injectif, donc bijectif. Donc M est inversible.
- (c) On calcule l'inverse de M par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow -L_1 \\ L_4 \leftrightarrow -L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) & \text{Ainsi, } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme :

$$f(x) = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

- (a) On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Il suffit alors de montrer la stabilité par combinaisons linéaires. Soit f et g deux fonctions de E , et λ et μ deux réels. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$f(x) = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x \quad \text{et} \quad g(x) = (a'x + b') \sin x + (c'x + d') \cos x.$$

Alors,

$$(\lambda f + \mu g)(x) = ((\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')) \sin x + ((\lambda c + \mu c')x + (\lambda d + \mu d')) \cos x.$$

Cela peut s'écrire $(\lambda f + \mu g)(x) = (a''x + b'') \sin x + (c''x + d'') \cos x$, avec :

$$a'' = \lambda a + \mu a', \quad b'' = \lambda b + \mu b', \quad c'' = \lambda c + \mu c', \quad d'' = \lambda d + \mu d'.$$

C'est donc encore un élément de E , ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- (b) Les quatre fonctions $(\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x)$ forment, par définition de E , une famille génératrice de E . Montrons qu'il s'agit également d'une famille libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $(ax+b) \sin x + (cx+d) \cos x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier :
- pour $x = 0$, on obtient : $d = 0$;
 - pour $x = \pi$, $-c\pi = 0$, donc $c = 0$;
 - ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(ax+b) \sin x = 0$. Donc, pour tout $x \in]0, \pi[$, $ax+b = 0$. Ce polynôme admet donc une infinité de racines : c'est le polynôme nul, donc $a = b = 0$.
- Ainsi, la famille est libre et génératrice de E : c'en est une base.

- (c) Soit $f \in E$, disons $f(x) = (ax+b) \sin x + (cx+d) \cos x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = a \sin x + (ax+b) \cos x + c \cos x - (cx+d) \sin x = (-cx + (a-d)) \sin x + (ax + (b+c)) \cos x.$$

Ainsi, f' est encore un élément de E . La dérivation définit donc une application $\varphi : E \rightarrow E$, $\varphi(f) = f'$. La dérivation étant linéaire, φ est donc un endomorphisme de E .

3. (a) La base $\mathcal{B}$ est (b_1, b_2, b_3, b_4) , où $b_1 = \sin x$, $b_2 = \cos x$, $b_3 = x \sin x$ et $b_4 = x \cos x$. Déterminons les images de ces éléments de la base $\mathcal{B}$ par l'endomorphisme φ :
- $\varphi(b_1) = \varphi(\sin x) = \cos x = b_2$;
 - $\varphi(b_2) = \varphi(\cos x) = -\sin x = -b_1$;
 - $\varphi(b_3) = \varphi(x \sin x) = \sin x + x \cos x = b_1 + b_4$;
 - $\varphi(b_4) = \varphi(x \cos x) = \cos x - x \sin x = b_2 - b_3$.

D'où la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$:

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

- (b) La matrice M est inversible, donc φ est un automorphisme de E . Par conséquent, φ^{-1} étant la primitivation, on obtient bien l'existence et l'unicité d'une primitive dans E de $f \in E$ (une primitive est donnée par $\varphi^{-1}(f)$, et l'unicité provient de l'injectivité de φ)
- (c) Soit $f : x \mapsto x \sin x + \cos x$ et $g : x \cos x + x \sin x$.

Une primitive F de f est $\varphi^{-1}(f)$. Dans la base $\mathcal{B}$, $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$[F]_{\mathcal{B}} = M^{-1}([f]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, une primitive de f est $F : x \mapsto 2 \sin x - x \cos x$. Toutes les autres primitives de f (pas forcément dans E) s'obtiennent en rajoutant une constante à F .

On calcule de même une primitive G de g :

$$[G]_{\mathcal{B}} = M^{-1}([g]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, une primitive de g est $G : x \mapsto (1+x) \sin x + (1-x) \cos x$. Toutes les autres primitives de g s'obtiennent en rajoutant une constante à G .

4. On considère maintenant M comme une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

(a) De simples calculs amènent :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad M - iI = \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}; \quad M + iI = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Astuce : pour calculer $(M - iI)^2$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, puisque M et iI commutent, et de même pour $(M + iI)^2$. Ainsi, $(M - iI)^2 = M^2 - 2iM - I$ et $(M + iI)^2 = M^2 + 2iM - I$. Cela évite d'avoir à faire trop de produits matriciels à faire. Ainsi :

$$(M - iI)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & -2i & -2 \\ -2i & -2 & 2 & -2i \\ 0 & 0 & -2 & 2i \\ 0 & 0 & -2i & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (M + iI)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 2i & -2 \\ 2i & -2 & 2 & 2i \\ 0 & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) On effectue un pivot de Gauss sur $(M - iI)^2$. En divisant toutes les lignes par deux, et en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - iL_3$, on obtient la matrice :

$$(M - iI)^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & i & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - iL_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une réduite de Gauss de $(M - iI)^2$ est de rang 2. Donc la dimension du noyau de $(f - i \cdot \text{id})^2$ est $4 - 2 = 2$. D'après la réduite de Gauss obtenue, le choix des deuxièmes et quatrièmes coordonnées imposent

les deux autres. Donc une base de $\text{Ker}((f - i \cdot \text{id})^2)$ est $e_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus $f(e_2) = Me_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = e_1 + ie_2$. Posons $b_2 = e_2$ et $b_1 = e_1 + ie_2$. Alors $b_1 = f(b_2)$, et (b_1, b_2) est

une base de $\text{Ker}((f - i \cdot \text{id})^2)$. En effet, la matrice de la famille (b_1, b_2) dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$: c'est une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible.

(c) Raisonnons de même pour $\text{Ker}((f + i \cdot \text{id})^2)$. On effectue donc un pivot de Gauss sur la matrice $(M + iI)^2$. On y effectue $L_2 \leftarrow L_2 + iL_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + iL_3$, après avoir divisé toutes les lignes par 2. On obtient :

$$(M + iI)^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -i & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 - iL_3 \\ L_2 \leftrightarrow -L_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une réduite de Gauss de $(M + iI)^2$ est de rang 2. Donc la dimension du noyau de $(f + i \cdot \text{id})^2$ est $4 - 2 = 2$.

Comme dans la question précédente, on obtient une base de $\text{Ker}((f + i \cdot \text{id})^2)$: $e_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus $f(e_4) = Me_4 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = e_3 - ie_4$. Posons $b_4 = e_4$ et $b_3 = e_3 - ie_4$. Alors $b_3 = f(b_4)$, et comme dans

la question précédente, (b_3, b_4) est une base de $\text{Ker}((f + i \cdot \text{id})^2)$.

(d) Pour montrer que (b_1, b_2, b_3, b_4) est une base de $\mathbb{C}^4$, deux façons : on peut exprimer la matrice P de cette famille dans la base canonique et on montre qu'elle est inversible (ce n'est pas un calcul inutile puisque P est alors la matrice de passage, et qu'on demande son inverse). Une autre solution, que nous développons ici revient à montrer que les deux noyaux $\text{Ker}((f - i \cdot \text{id})^2)$ et $\text{Ker}((f + i \cdot \text{id})^2)$ sont en somme directe. Alors, une base de leur somme est obtenue en juxtaposant des bases de chacun des espaces. Ainsi, (b_1, b_2, b_3, b_4) est une base de la somme des deux noyaux. C'est donc en particulier une famille libre de $\mathbb{C}^4$; comme $\mathbb{C}^4$ est de dimension 4, c'est une famille libre maximale, donc une base de $\mathbb{C}^4$.

Montrons donc que la somme est directe. Soit $x \in \text{Ker}((f - i \cdot \text{id})^2) \cap \text{Ker}((f + i \cdot \text{id})^2)$. Alors

$$(f - i \cdot \text{id})^2(x) = 0 \quad \text{et} \quad (f + i \cdot \text{id})^2(x) = 0.$$

Ainsi, puisque f et id commute, la formule du binôme de Newton (ou bien l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, qui nécessite également la commutativité) donne :

$$0 = (f + i \cdot \text{id})^2(x) - (f - i \cdot \text{id})^2(x) = 4i f(x).$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}(f) = \{0\}$, d'où $x = 0$. L'intersection des deux noyaux est donc réduite à $\{0\}$ ce qui prouve que leur somme est directe.

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversons cette matrice par la méthode du pivot.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} i & 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & -1 & -i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & -i & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow -i L_1 \\ L_4 \leftarrow i L_4 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & -1 & -i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & i & 1 & i & 0 & 0 & 0 & i \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & -1 & -i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2i & 0 & 0 & -1 & i \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & -i & -1 & -1 & i \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2} L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & -i & -1 & -1 & i \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -i L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{i}{2} L_4 \end{array} \\ \longrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) & \text{Donc } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Une vérification immédiate montre qu'on ne s'est pas trompé dans les calculs.

(e) Calculons les images des différents éléments de la base $\mathcal{B}$ par f :

- $f(b_1) = f^2(b_2) = (f - i \cdot \text{id})^2(b_2) + 2i f(b_2) + b_2 = 2i b_1 + b_2$;
- $f(b_2) = b_1$;
- $f(b_3) = f^2(b_4) = (f + i \cdot \text{id})^2(b_4) - 2i f(b_4) + b_4 = -2i b_1 + b_2$;
- $f(b_4) = b_3$.

D'où la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$B = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Pour pouvoir calculer facilement B^n il aurait fallu choisir un peu différemment la base $\mathcal{B}$ (afin d'obtenir une matrice de type Jordan, cf un DM précédent). On contourne cet obstacle en essayant de calculer B^n par récurrence. Tout d'abord, puisque B est une matrice diagonale par blocs, $B^n = \begin{pmatrix} C^n & 0 \\ 0 & D^n \end{pmatrix}$, où $C = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons donc C^n et D^n .

Pour commencer $C^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} = 2iC + I_2$. On va montrer par récurrence sur n que

$$C^n = a_n C + b_n I_2,$$

pour des suites de complexes convenables $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

L'initialisation se fait pour $n = 1$, avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, ou pour $n = 2$, avec $a_2 = 2i$ et $b_2 = 1$.

Supposons que $C^n = a_n C + b_n I_2$. En multipliant cette relation par C ,

$$C^{n+1} = a_n C^2 + b_n C = (2i a_n + b_n) C + a_n I_2.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$b_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 2i a_n + b_n = 2i a_n + a_{n-1}.$$

Cette dernière équation est aussi satisfaite pour $n = 1$, en considérant $I = C^0$, donc $a_0 = 0$ (vérification immédiate). Ainsi, en définissant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme la suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = 2i a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad b_n = a_{n-1}, \quad b_0 = 1,$$

la propriété est bien héréditaire, et ainsi, pour tout $n \geq 0$, $C^n = a_n C + b_n I_2$.

Explicitons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Son polynôme caractéristique est $X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2$, donc on expliciter $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous la forme suivante :

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = (\alpha + n\beta) i^n.$$

Pour $n = 0$, on obtient $\alpha = 0$. Pour $n = 1$, on obtient $\beta = -i$. Ainsi, on obtient l'expression de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et enfin de $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \geq 0, C^n = -n i^{n+1} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1 - n) i^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+n) i^n & n i^{n-1} \\ n i^{n-1} & (1-n) i^n \end{pmatrix}.$$

On obtient D^n de la même manière. On peut aussi remarquer que $D = \overline{C}$ (conjugué complexe terme à terme), donc

$$D^n = \overline{C^n} = \begin{pmatrix} (1+n)(-i)^n & n(-i)^{n-1} \\ n(-i)^{n-1} & (1-n)(-i)^n \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, pour tout $n \geq 0$,

$$B^n = \begin{pmatrix} (1+n) i^n & n i^{n-1} & 0 & 0 \\ n i^{n-1} & (1-n) i^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+n)(-i)^n & n(-i)^{n-1} \\ 0 & 0 & n(-i)^{n-1} & (1-n)(-i)^n \end{pmatrix}.$$

Un calcul de $M^n = P B^n P^{-1}$, fastidieux mais sans difficulté, amène :

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^n + (-i)^n & -(i^{n-1} + (-i)^{n-1}) & n(i^{n-1} + (-i)^{n-1}) & n(i^n + (-i)^n) \\ i^{n-1} + (-i)^{n-1} & i^n + (-i)^n & -n(i^n + (-i)^n) & n(i^{n-1} + (-i)^{n-1}) \\ 0 & 0 & i^n + (-i)^n & -(i^{n-1} + (-i)^{n-1}) \\ 0 & 0 & i^{n-1} + (-i)^{n-1} & i^n + (-i)^n \end{pmatrix}.$$

Or,

- si n est pair, $\frac{i^n + (-i)^n}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}}$ et $\frac{i^{n-1} + (-i)^{n-1}}{2} = 0$;
- si n est impair, $\frac{i^{n-1} + (-i)^{n-1}}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ et $\frac{i^n + (-i)^n}{2} = 0$;

On en déduit l'expression de M^n suivant la parité de n :

$$n \text{ pair} : M^n = (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \text{ impair} : M^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une vérification immédiate pour $n = 0, 1, 2$ confirme ce résultat.

Remarquez que ce résultat est aussi valable pour $n = -1$ (ce qui n'était pas évident *a priori*).

- (g) La dérivée n -ième de la fonction f de la question 3c est la fonction correspondant dans la base $\mathcal{B}$ à la colonne $M^n[f]_{\mathcal{B}}$. Si n est pair,

$$[f^{(n)}]_{\mathcal{B}} = (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1-n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et si n est impair,

$$[f^{(n)}]_{\mathcal{B}} = (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n}{2}}((1-n)\cos x + x\sin x)$ si n est pair, et $f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}((n-1)\sin x + x\cos x)$ si n est impair.

De même, $[g^{(n)}]_{\mathcal{B}} = M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où :

- si n est pair, $g^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n}{2}}(n\sin x - n\cos x + x\sin x + x\cos x)$;
- si n est impair, $g^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n\sin x + n\cos x - x\sin x + x\cos x)$.