Algèbre 6 – Diagonalisation : feuille technique

Correction de l'exercice 1 –

1. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
3. $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. non diagonalisable
5. $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
7. $P_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_7 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.
8. non diagonalisable (une seule vp : 2, $\dim E_2 = 2$).
9. $P_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
10. $P_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
11. non diagonalisable ($\mathrm{Sp}(M_{11}) = \{1, 2\}$, $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)
12. non diagonalisable ($\mathrm{Sp}(M_{12}) = \{-1, 1\}$, $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$)
13. $P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$
14. $P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
15. pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (4 vp distinctes). Je n'écris pas la diagonalisation.
16. $P_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6. \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 5 –

1. $M_1 = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $M_2 = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Non diagonalisable. On a $M_3 = PJP^{-1}$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (par exemple !)

   Pour trouver cela, par analyse synthèse, la base (b_1, b_2, b_3, b_4) doit vérifier : $b_1, b_2 \in E_1$, $b_4 \in \mathrm{Ker}((f-2\mathrm{id})^2) \setminus \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})$, et $b_3 = (f - 2\mathrm{id})(b_4)$.
4. $M_4 = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 6 –

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ est non inversible, si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$, donc si et seulement si $(3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0$, don si et seulement si $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$. Or, $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda+1)(\lambda-5)$, donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 5\}}$.

  Comme A admet deux valeurs propres, alors que c'est une matrice carré de taille 2, on en déduit que A est diagonalisable, et que tous ses espaces propres sont de dimension 1. Pour les déterminer, il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans chacun des deux espaces propres E_{-1} et E_5.

  $*$ On a $A + I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, donc ses colonnes vérifient $C_1 - 2C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in E_{-1}$, et comme E_{-1} est de dimension 1, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

  $*$ On a $A - 5I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, donc ses colonnes vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_5$, et comme E_5 est de dimension 1, $E_5 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  En posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$, on a donc la relation de diagonalisation $A = PDP^{-1}$, et la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 amène directement :

  $$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de B si et seulement si $B - \lambda I_3$ est non inversible. Effectuons un pivot de Gauss sur cette matrice, afin d'en déterminer le rang suivant la valeur de λ.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 5-\lambda & 1 & -3 \end{pmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_3) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -\lambda^2+6\lambda-8 \end{pmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)L_1) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 \end{pmatrix} = B_\lambda && (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)
\end{aligned}$$

Ainsi, le pivot de Gauss conservant le rang, la matrice $B - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si un des coefficients diagonaux au moins de cette matrice triangulaire est nul, donc si et seulement si $\lambda = 4$, ou $-\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$. Les deux racines de cette équation du second degré sont 4 et 2, donc finalement $\boxed{\mathrm{Sp}B = \{2, 4\}}$.

* Si $\lambda = 4$, on a $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(B_4) = 1$, donc, d'après le théorème du rang, $\dim E_4 = 2$. Or, le pivot de Gauss conservant le noyau, les vecteurs de E_4, sont les vecteurs du noyau de B_4. Comme les colonnes de B_4 vérifient les relations $C_1 - C_2 = 0$ et $3C_1 + C_3 = 0$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_4. Comme ils sont clairement non colinéaires, et que E_4 est de dimension 2, on en déduit que $E_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
* Puisque la somme totale des dimensions des espaces propres ne peut excéder 3, et que $\dim E_4 = 2$, et puisqu'un espace propre n'est pas résuit à 0, la dimension de E_2 est égale à 1. Or,

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes vérifient $C_1 + C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$, et comme E_2 est de dimension 1, $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$, on a la relation de diagonalisation $B = PDP^{-1}$.

Pour trouver P^{-1}, on utilise la méthode du pivot, en effectuant sur I_3 les mêmes opérations sur les lignes que celles qui permettent de passer de P à I_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_2 \leftarrow -2L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 - L_2$$

et on obtient donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

Correction de l'exercice 7 –

1. Cherchons les valeurs propres de A, c'est-à-dire les valeurs (dans $\mathbb{R}$, ou éventuellement dans $\mathbb{C}$) pour lesquelles $A - \lambda I_4$ n'est pas inversible. Pour cela, nous effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I_4$:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 4L_4 - (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 8-4\lambda & 4-4\lambda & -\lambda^2+8\lambda-11 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & -\lambda^2+6\lambda-5 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & -2(\lambda-2) & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & -2(\lambda-1) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $A - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si la matrice triangulaire supérieure obtenue par des opérations élémentaires est non inversible, si et seulement si les coefficients diagonaux de cette dernière ne sont pas tous non nuls, si et seulement si $\lambda = 1, 2$ ou 3. Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de A est $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}.}$

On ne peut pas conclure tout de suite quant à la diagonalisabilité de A, car on n'est pas dans les cas extrêmes d'une seule valeur propre, ou d'un nombre de valeurs propres égal à l'ordre de la matrice. Déterminons donc la dimension des espaces propres.

Dimension des espaces propres – diagonalisabilité.

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $A - I_4$, on a :

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}\, M_1.$$

Or, $\mathrm{rg}\, M_1 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc $\boxed{\dim E_1 = 2}$.

On peut dès à présent conclure que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$. En effet $\dim E_2 \geqslant 1$ et $\dim E_3 \geqslant 1$, puisque 2 et 3 sont des valeurs propres de A. Ainsi, $\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 \geqslant 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Comme les espaces E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe, et sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, on a aussi l'inégalité réciproque. D'où l'égalité. D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, A est donc diagonalisable. On a de plus acquis la dimension des espaces propres :

$$\boxed{\dim E_1 = 2} \qquad \boxed{\dim E_2 = 1} \qquad \boxed{\dim E_3 = 1}.$$

L'espace propre E_1

Les colonnes de M_1 vérifient $C_1 + C_3 = 0$ et $C_2 + C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de M_1, donc aussi de $A - I_4$, le pivot de Gauss préservant le noyau. Donc ce sont des vecteurs de E_1. De plus, ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre (argument valable uniquement pour une famille de 2 vecteurs !) et comme $\dim E_1 = 2$, ils forment une base de E_1. Ainsi, $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$.

L'espace propre E_2

De même, $M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc les colonnes de M_2 vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de E_2. Comme E_2 est de dimension 1, $\boxed{E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

L'espace propre E_3 De même, $M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, donc les colonnes de M_3 vérifient $C_3 + 2C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un élément de E_3. Comme E_3 est de dimension 1, $\boxed{E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$.

Ainsi, on a :

$$\boxed{D = P^{-1}AP, \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

2. Cherchons à quelle condition sur λ la matrice $B - \lambda I_4$ n'est pas inversible, en effectuant un pivot de Gauss sur cette matrice.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4 \\ 3-\lambda & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow (2-\lambda)L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-1) \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $B - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, 2\}$ (que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

Encore une fois, il est impossible de conclure immédiatement quant à la diagonalisabilité de B. Étudions donc les dimensions des espaces propres.

L'espace propre E_1

On a : $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M_1 est de rang 2.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\mathrm{rg}(B - I_4) = 2$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - I_4$, on a donc

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(B - I_4) = 4 - 2 = \boxed{2 = \dim E_1}.$$

L'espace propre E_2

On a : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M_2 est de rang 3.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\mathrm{rg}(B - 2I_4) = 3$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - 2I_4$, on a donc

$$\dim E_2 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(B - 2I_4) = 4 - 3 = \boxed{1 = \dim E_1}.$$

On a donc $\dim E_1 + \dim E_2 = 3 < 4$, donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable}}$ (ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$).

Correction de l'exercice 8 –

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_1)$ si et seulement si $\det(A_1 - \lambda I_2) = 0$, si et seulement si

$$\lambda(\lambda - 3) + 2 = 0 \qquad \text{soit:} \qquad : \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 1.$$

Donc A_1 possède deux valeurs propres, égales à 1 et 2. Donc A_1 est diagonalisable, et ses espaces propres sont de dimension 1.

- De plus $A_1 - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, donc ses colonnes vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$, donc $E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- De plus, $A_1 - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, donc ses colonnes vérifient $C_1 + 2C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2$, donc $E_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $A_1 = PDP^{-1}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de A_2 si et seulement si $\mathrm{rg}(A_2 - \lambda I_3) < 3$. On calcule ce rang par la méthode du pivot.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\lambda \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_1 \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \end{aligned}$$

Ainsi, le rang de cette matrice triangulaire est 3 si et seulement ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Donc $\mathrm{Sp}(A_2) = \{0, 1\}$.

De plus, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc $\dim E_0 = 1$

De même, $\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, donc $\dim E_1 = 2$.

Ainsi, $\dim E_0 + \dim E_1 = 3$, donc A_2 est diagonalisable.

De plus, les colonnes de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ vérifient $C_2 + C_3 = 0$, donc, comme $\dim E_0 = 1$, $E_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les colonnes de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $C_2 = 0$ et $C_1 + 2C_3 = 0$, donc $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

On a donc une relation $A_2 = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Le réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A_3 si et seulement si $A_3 - \lambda I_4$ est de rang 4. On effectue de même un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 3-\lambda & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda^2+6\lambda-6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-3)L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A_3) = \{2, 4\}$.

De plus, $\mathrm{rg}(A - 2I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$, donc $\dim E_2 = 1$

De même, $\mathrm{rg}(A - 4I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$ Ainsi, $\dim E_4 = 1$.

Donc $\dim E_2 + \dim E_4 \neq 4$, donc A_4 n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 9 –

1. **Étude de la diagonalisabilité de A**

Cherchons les valeurs propres de A, c'est-à-dire les valeurs (dans $\mathbb{R}$, ou éventuellement dans $\mathbb{C}$) pour lesquelles $A - \lambda I_4$ n'est pas inversible. Pour cela, nous effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I_4$:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 4L_4 - (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 8-4\lambda & 4-4\lambda & -\lambda^2+8\lambda-11 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & -\lambda^2+6\lambda-5 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & -2(\lambda-2) & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & -2(\lambda-1) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $A - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si la matrice triangulaire supérieure obtenue par des opérations élémentaires est non inversible, si et seulement si les coefficients diagonaux de cette dernière ne sont pas tous non nuls, si et seulement si $\lambda = 1, 2$ ou 3. Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de A est $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2, 3\}$.

On ne peut pas conclure tout de suite quant à la diagonalisabilité de A, car on n'est pas dans les cas extrêmes d'une seule valeur propre, ou d'un nombre de valeurs propres égal à l'ordre de la matrice. Déterminons donc la dimension des espaces propres.

L'espace propre E_1.

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $A - I_4$, on a :

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}\, M_1.$$

Or, $\mathrm{rg}\, M_1 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc $\dim E_1 = 2$.

On peut dès à présent conclure que A est diagonalisable. En effet $\dim E_2 \geqslant 1$ et $\dim E_3 \geqslant 1$, puisque 2 et 3 sont des valeurs propres de A. Ainsi, $\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 \geqslant 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Comme les espaces E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe, et sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, on a aussi l'inégalité réciproque. D'où l'égalité. D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, A est donc diagonalisable. On a de plus acquis la dimension des espaces propres :

$$\dim E_1 = 2 \qquad \dim E_2 = 1 \qquad \dim E_3 = 1.$$

Sachant que A est diagonalisable, cherchons-en une base de diagonalisation. Pour cela, commençons par trouver une base de E_1. On a, pour tout $X \in \mathbb{R}^4$:

$$X \in E_1 \iff \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application φ qui a (x, y, z, t) associe (z, t) (les variables ne correspondant pas à un pivot) est un isomorphisme de E_1 dans $\mathbb{R}^2$. Une base de E_1 est donc donnée par l'image réciproque par φ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit :

$$\left(\varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On aurait aussi pu remaquer directement que les colonnes de la matrice M_1 vérifient $C_1 + C_3 = 0$ et $C_2 + C_4 = 0$, ce qui fournit deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à M_1, donc dans E_1.
Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de E_1, qui est de dimension 2. Donc ils forment une base de E_1.

L'espace propre E_2 On a, pour tout $X \in \mathbb{R}^4$,

$$X \in E_2 \iff M_2 X = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0.$$

Les colonnes de M_2 vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de E_2. Comme E_2 est de dimension 1, la famille constituée de ce seul vecteur est une base de E_2.

L'espace propre E_3 On a, pour tout $X \in \mathbb{R}^4$,

$$X \in E_3 \iff M_3 X = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0.$$

Les colonnes de M_3 vérifient $C_3 + 2C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de E_3. Comme E_3 est de dimension 1, la famille constituée de ce seul vecteur est une base de E_3.
Ainsi, on a :

$$D = P^{-1}AP, \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Étude de la diagonalisabilité de B**.**

Cherchons à quelle condition sur λ la matrice $B - \lambda I_4$ n'est pas inversible, en effectuant un pivot de Gauss sur cette matrice.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4 \\ 3-\lambda & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow (2-\lambda)L_2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-1) \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $B - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, 2\}$ (que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

Encore une fois, il est impossible de conclure immédiatement quant à la diagonalisabilité de B. Étudions donc les dimensions des espaces propres.

L'espace propre E_1

On a : $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M_1 est de rang 2.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\mathrm{rg}(B - I_4) = 2$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - I_4$, on a donc

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(B - I_4) = 4 - 2 = 2.$$

L'espace propre E_2

On a : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M_2 est de rang 3.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\mathrm{rg}(B - 2I_4) = 3$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - 2I_4$, on a donc

$$\dim E_2 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(B - 2I_4) = 4 - 3 = 1.$$

On a donc $\dim E_1 + \dim E_2 = 3 < 4$, donc B n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$).

2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}$. Les relations de récurrence satisfaites par les quatre suites se résument matriciellement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n, \qquad \text{d'où} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X^n = A^n X_0.$$

Calculons donc A^n à l'aide de la diagonalisation de A donnée dans la question précédente. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (PDP^{-1})^n = P(DP^{-1}P)^{n-1}DP^{-1} = PD^{n-1}DP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

D étant diagonale, on a directement ses puissances :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Calculons donc P^{-1}, à l'aide de la méthode du pivot. Puisque P est une matrice de passage d'une base à une autre, elle est inversible. Effectuons sur I_4 les mêmes opérations élémentaires que celles que l'on effectue sur P pour la transformer en I_4 :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_4$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Faites tout de même la vérification !

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2^{n+1} & -2^n & -2^{n+1} & 2^n \\ 3^n & -3^n & -3^n & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & -(2^n-1) & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 2(2^n-1) & 2-2^n & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 3^n-1 & -(3^n-1) & 2-3^n & 3^n-1 \\ 2(3^n-1) & -2(3^n-1) & -2(3^n-1) & 2\cdot 3^n-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vérifiez que pour $n = 0$ et $n = 1$, on retombe bien sur I_4 et A !

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & -(2^n-1) & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 2(2^n-1) & 2-2^n & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 3^n-1 & -(3^n-1) & 2-3^n & 3^n-1 \\ 2(3^n-1) & -2(3^n-1) & -2(3^n-1) & 2\cdot 3^n-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} \\ 3-2^{n+1} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En passant, constatez que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes, ce qui était loin d'être évident !

Correction de l'exercice 10 –

- Déterminer les valeurs propres d'une matrice 2×2 se fait avec le déterminant : un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_2$ est non inversible, donc si et seulement si $\det(A-\lambda I_2)=0$, donc si et seulement si $(2-\lambda)(-2-\lambda)-12=0$, donc si et seulement si $\lambda^2-16=0$, donc $\mathrm{Sp}(A)=\{-4,4\}$.
- Comme A est d'ordre 2, et admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, et chaque espace propre est de dimension 1.
- Déterminons l'espace propre E_4 : $A-4I_2=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient la relation $3C_1+2C_2=0$, c'est à dire :
$$\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$
Ainsi, $\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\in E_4$, et comme E_4 est de dimension 1, $E_4=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\right)$.
- Déterminons de même E_{-4} : $A+4I_2=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient C_1-2C_2, donc, de même que précédemment, $E_{-4}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$.
- Ainsi, en posant $P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, et $D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$, on a la relation $A=PDP^{-1}$.
- On a $\det P=-8$, donc $P^{-1}=\dfrac{1}{-8}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 – Le scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_2$ n'est pas inversible, donc si et seulement si $\det(A-\lambda I_2)=0$ Or :
$$\det(A-\lambda I_2)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3).$$
Ainsi, $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,3\}$.
La matrice A, d'ordre 2, admettant 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, et ses espaces propres sont de dimension 1.

- L'espace propre E_{-1} : on a $A+I_2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Les colonnes de $A+I_2$ vérifient : $C_1-C_2=0$, ainsi, comme dans une question précédente, $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $A+I_2$, donc dans E_{-1}. Comme E_{-1} est de dimension 1, on en déduit que $E_{-1}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.
- L'espace propre E_3 : on a $A-3I_2=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Les colonnes de $A+I_2$ vérifient : $C_1+C_2=0$, ainsi $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ est dans E_3.
Comme E_3 est de dimension 1, on en déduit que $E_3=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\left(\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de diagonalisation de l'endomorphisme canoniquement associé à A, et la formule de changement de base fournit la relation $A=PDP^{-1}$, où :
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 12 – Soit $\lambda\in RR$. Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A-\lambda I_4)<4$. Déterminons ce rang à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$A-\lambda I_4=\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & -1 & 1\\ 2 & 3-\lambda & -2 & 2\\ 1 & 2 & -2-\lambda & 1\\ 1 & 2 & -1 & -\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -\lambda\\ 2 & 3-\lambda & -2 & 2\\ 1 & 2 & -2-\lambda & 1\\ -\lambda & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad L_4\leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -\lambda\\ 0 & -1-\lambda & 0 & 2+2\lambda\\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1+\lambda\\ 0 & 2+2\lambda & -1-\lambda & 1-\lambda^2\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4+\lambda L_1\end{matrix}$$

$$\longrightarrow A_\lambda=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -\lambda\\ 0 & -1-\lambda & 0 & 2+2\lambda\\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1+\lambda\\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1)(\lambda-4)\end{pmatrix}\quad L_4\leftarrow L_4+2L_2-L_3$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,4\}$ De plus :

- $\mathrm{rg}(A+I_4)=\mathrm{rg}(A_{-1})=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1$ donc E_{-1} est de dimension 3, d'après le théorème du rang. De plus, pour tout X de $\mathbb{R}^4$, $(A+I_4)X=0\Longleftrightarrow A_{-1}X=0$, donc on trouve une base de E_{-1} en résolvant le système associé à A_{-1}. Les colonnes de A_{-1} vérifient les relations :

$$2C_1-C_2=0\qquad C_1+C_3=0\qquad\text{et}\qquad C_1-C_4=0.$$

  Ainsi, les trois vecteurs $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont dans E_3, et forment une famille libre (car ils sont échelonnés). Donc comme $\dim E_3=3$, ils forment une base de E_3.

- De même, $\mathrm{rg}(A-4I_4)=\mathrm{rg}(A_4)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -4\\ 0 & -5 & 0 & 10\\ 0 & 0 & -5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=3$, donc $\dim E_4=1$.

  De plus, les colonnes de cette matrice vérifient $2C_2+C_4+C_3+C_1=0$, donc $E_4=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $A=PDP^{-1}$, avec :

$$P=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 13 –

1. $A_1-\lambda I_2$ est non inversible si et seulement si son déterminant est nul. Or

$$\det(A_1-\lambda I_2)=(2-\lambda)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

   Ainsi, $A_1-\lambda I_2$ est non inversible si et seulement si $\lambda=1$ ou $\lambda=3$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A_1)=\{1,3\}$.

   La matrice carrée $A_1\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant 2 valeurs propres, elle est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $\mathbb{C}$).

2. De même,
$$\det(A_2 - \lambda I_2) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = -4$. Ainsi, il n'admet pas de racines réelles. Par conséquent, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A_2) = \varnothing$, et A_2 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
En revanche, le polynôme ci-dessus admet deux racines complexes $\frac{2\pm \mathrm{i}\sqrt{4}}{2}$, donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A_2) = \{1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}\}$. Ainsi, A_2 ayant 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3. De même,
$$\det(A_3 - \lambda I_2) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2.$$
Ainsi, $\mathrm{Spec}(A_2) = \{2\}$. La matrice A_2 n'ayant qu'une valeur propre, si elle était diagonalisable, elle serait la matrice d'une homothétie, donc égale à λI_2 pour une certaine valeur de λ. Comme ce n'est pas le cas, A_2 n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$).

4. Le réel λ est valeur propre de A_4 si et seulement si le système associé à la matrice $A_4 - \lambda I_3$ est de Cramer. Résolvons donc ce système par la méthode du pivot de Gauss :
$$A_4 - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftrightarrow L_1)$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - (1+\lambda)L_1)$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2)$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$
La matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement la réduite de Gauss n'est pas inversible si et seulement si un de ses coefficients diagonaux est nul, si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 + \lambda = 0$, si et seulement si $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A_4) = \{-1, 0, 1\}$. Comme A_4 est carrée d'ordre 3 et possède trois valeurs propres, elle est diagonalisable.

5. On fait de même pour A_5 :
$$A_5 - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftrightarrow L_1$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (1-\lambda)L_1 \end{array}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_3$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = M_\lambda$$
Ainsi, la matrice $A_5 - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si la matrice diagonale M_λ est non inversible, donc si et seulement si un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A_5) = \{0, 3\}$.

- D'après le théorème du rang $\dim E_0 = 4 - \operatorname{rg} M_0$. Or,

$$M_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice échelonnée ayant trois lignes non nulles, elle est de rang 3, donc $\dim E_0 = 4 - 3 = 1$.
- D'après le théorème du rang $\dim E_3 = 4 - \operatorname{rg} M_3$. Or,

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice a ses trois premières colonnes identiques, et la quatrième n'est pas colinéaire aux premières, donc $\operatorname{rg}(M_3) = 2$. Ainsi, $\dim E_3 = 4 - 2 = 2$.

Comme $\dim E_0 + \dim E_3 = 3 \neq 4$, on en déduit que A_5 n'est pas diagonalisable (ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$).

6. La matrice A_6 est triangulaire supérieure. Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\operatorname{Spec}(A_6) = \{1\}$. La matrice A_6 n'ayant qu'une valeur propre, et n'étant pas la matrice d'une homothétie, on en déduit, comme pour (c), que A_6 n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 14 –

1. Les valeurs propres de A_1 sont les racines du déterminant de $A_1 - \lambda I_2$. Or,

$$\det(A_1 - \lambda I_2) = (4 - \lambda)(-5 - \lambda) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Ainsi, $\operatorname{Spec}(A_1) = \{-2, 1\}$. Comme A_1 admet deux valeurs propres, on en déduit que A_1 est diagonalisable, et de plus, $\dim E_1 = \dim E_{-2} = 1$.

- Cas de $\lambda = 1$. $A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$. Comme $\dim E_1 = 1$, on en déduit que $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Cas de $\lambda = -2$. $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + 2C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2$. Comme $\dim E_2 = 1$, on en déduit que $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A_1 est $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{donc:} \qquad P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'après la formule d'inversion des matrices 2×2.

La relation entre ces matrices est $D_1 = P_1^{-1} A_1 P_1$.

2. On fait un pivot de Gauss sur la matrice $A_2 - \lambda I_4$:

$$\begin{aligned} A_2 - \lambda I_3 = & \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 3 \\ -6 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} & & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -6 & 4-\lambda & 6 \\ -1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} & & L_2 \leftarrow 6L_2 - (1+\lambda)L_1 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 12-6\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Cette matrice est non inversible si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 1$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A_2) = \{1, 2\}$

- $X \in E_1$ si et seulement si $M_1 X = 0$. Or, $M_1 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Les deux premières colonnes étant colinéaires, mais pas les deux dernières, $\mathrm{rg}(M_1) = 2$, donc d'après le théorème du rang, $\dim E_1 = 1$. La relation $C_1 + 2C_2$ sur la matrice M_1 donne $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$, puis, puisque cet espace est de dimension 1, $E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $X \in E_2$ si et seulement si $M_2 X = 0$. Or, $M_1 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Cette matrice n'ayant qu'une ligne non nulle, elle est de rang 1, donc $\dim E_2 = 2$. On peut d'ors et déjà en conclure que A_8 est diagonalisable, puisque $\dim E_2 + \dim E_1 = 3$.
  De plus, les deux relations $C_1 + 3C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$ montrent que

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A_8 est diagonalisable dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

La matrice dans cette base est $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et la matrice de passage est $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La relation entre ces matrices est $D_2 = P_2^{-1} A_2 P_2$.

Trouvons l'inverse de P_2 par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ainsi, $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 17 – Exercice technique

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ (il n'est pas précisé dans l'énoncé si la diagonalisation doit se faire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc je prends le plus large possible). Le complexe λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas une matrice inversible. Nous recherchons donc le rang de $A - \lambda I_3$ à l'aide d'un pivot de Gauss, que nous présentons sous forme algorithmique, les transformations successives étant représentées par des flèches.

$$\begin{array}{rlr}
A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & -4 \\ -2 & 4-\lambda & 4 \\ 2 & -3 & -3-\lambda \end{pmatrix} & \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3-\lambda \\ -2 & 4-\lambda & 4 \\ 3-\lambda & -3 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_1 & \leftrightarrow & L_3 \end{pmatrix} \\
& \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 3-3\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \\ L_3 & \leftarrow & 2L_3 - (3-\lambda)L_1 \end{pmatrix} \\
& \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} = M_\lambda & \begin{pmatrix} L_3 & \leftarrow & L_3 - 3L_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi, la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si la matrice M_λ obtenue à l'issue de la réduction de Gauss est non inversible, si et seulement si (puisque cette dernière est triangulaire) un des coefficients diagonaux de M_λ est nul, si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ (les racines du polynôme $-2 + 3X - X^2$ étant 1 et 2). Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}.}$

- Étude du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.
  Le sous-epace propre E_1 est le noyau de la matrice $A - \lambda I_3$, donc le noyau de la matrice M_1, les opérations de Gauss sur les lignes préservant le noyau. Or,

  $$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Cette matrice est de rang 1, donc, d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension 2. Ainsi, $\boxed{\dim E_1 = 2}$. Puisque E_2 est au moins de dimension 1, et que la somme des dimensions des espaces propres ne peut pas excéder 3, on a nécessairement $\dim E_2 = 1$. On peut alors d'ores et déjà affirmer que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$, puisque $\dim E_1 + \dim E_2 = 3$.

  De plus, les colonnes de M_1 vérifient les relations $3C_1 + 2C_2 = 0$ et $2C_1 + C_3 = 0$. Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_1. Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants et que $\dim E_1 = 2$, on en déduit que

  $$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_1}$$

- Étude du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
  De même, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Les colonnes de M_1 vérifient $C_1 - C_2 + C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \in \end{pmatrix}$ E_2. Comme $\dim E_2 = 1$, on obtient :

  $$\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{en posant } P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = PDP^{-1}.}$

2. (a) On peut bien sûr calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A et I_3. On peut aussi se servir de la diagonalisation de la question précédente : en effet,

$$(D - I_3)(D - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

donc $D^2 - 3D + 2I_3 = 0$, donc

$$A^2 - 3A + 2I_3 = PDP^{-1}PDP^{-1} - 3PDP^{-1} + 2PP^{-1} = P(D^2 - 3D + 2I_3)P^{-1} = 0.$$

Ainsi, $\boxed{X^2 - 3X + 1 \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un polynôme Q, et un polynôme $R = aX + b$ de degré au plus 1 tel que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R = (X - 1)(X - 2)Q + aX + b.$$

En évaluant cette relation en 1 et en 2, il vient :

$$\begin{cases} 1 & a + b \\ 2^n & = 2a + b \end{cases}$$

On en déduit facilement que

$$\begin{cases} a & = 2^n - 1 \\ b & = -2^n + 2 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + (2^n - 1)X + (-2^n + 2).}$

En spécialisant en A, du fait que $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A, on obtient :

$$\boxed{A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3}.$$

Vous pouvez vérifier rapidement que pour $n = 0$, on retrouve l'identité, pour $n = 1$, on retrouve la matrice A, et pour $n = 2$, on retrouve le polynôme annulateur de A. Ces vérifications élémentaires permettent de détecter les petites erreurs de calcul ou de signe. Ne vous en privez pas !

3. La matrice A est inversible car $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Par ailleurs on trouve facilement l'inverse de A en utilisant le polynôme annulateur, en isolant I_3 et en mettant A en facteur dans le reste de l'expression : cela donnc

$$I_3 = -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}\right)A.$$

Ainsi, $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}}$

Cette méthode utilisant le polynôme annulateur pour trouver l'inverse est à retenir. Elle est très efficiace, et utilisable dès lors qu'on connait un polynôme annulateur dont le terme constant est non nul.

Pour le calcul de A^{-n}, on extrapole la formule de A^n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$B_n = (2^{-n} - 1)A + (2 - 2^n)I_3.$$

Vérifions que B_n est bien l'inverse de A^n :

$$\begin{aligned} A^nB_n = B_nA^n &= ((2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3)((2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3) \\ &= (2^{-n} - 1)(2^n - 1)A^2 + ((2^{-n} - 1)(2 - 2^n) + (2^n - 1)(2 - 2^{-n}))A + (2 - 2^{-n})(2 - 2^n)I_3 \\ &= (2 - 2^n - 2^{-n})A^2 + (-6 + 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n)A + (5 - 2 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 2^n)I_3 \\ &= 2(A^2 - 3A + 2I_3) - 2^n(A^2 - 3A + 2I_3) - 2^{-n}(A^2 - 3A + 2I_3) + I_3 \\ &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, B_n est bien l'inverse de A^n, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{A^{-n} = (2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3}$$

Remarquez que cet argument est aussi valable pour $n = 1$, et redone donc l'expression de A^{-1}.

Correction de l'exercice 19 –

1. Notons $\mathcal{A}_n$ l'événement : « Alice a la balle après n lancers », et de même pour $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{C}_n$. D'après l'énoncé :
   - $P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{A}_n) = 0$ (on ne s'envoie pas la balle à soi-même), $P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{A}_n) = \frac{3}{4}$ et $P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{A}_n) = \frac{1}{4}$;
   - $P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \frac{3}{4}$, $P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{B}_n) = 0$ et $P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \frac{1}{4}$;
   - $P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{C}_n) = 0$, $P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{C}_n) = 1$ et $P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{C}_n) = 0$.

   D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet (A_n, B_n, C_n), on obtient :
   - $A_{n+1} = P(\mathcal{A}_{n+1}) = P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) + P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{B}_n)P(\mathcal{B}_n) + P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{C}_n)P(\mathcal{C}_n) = \frac{3}{4}B_n$;
   - $B_{n+1} = P(\mathcal{B}_{n+1}) = P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) + P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{B}_n)P(\mathcal{B}_n) + P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{C}_n)P(\mathcal{C}_n) = \frac{3}{4}A_n + C_n$;
   - $C_{n+1} = P(\mathcal{C}_{n+1}) = P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) + P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{B}_n)P(\mathcal{B}_n) + P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{C}_n)P(\mathcal{C}_n) = \frac{1}{4}A_n + \frac{1}{4}B_n$;

   On obtient donc la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$

2. λ est valeur propre de M si et seulement si la matrice $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible. Effectuons un pivot de Gauss. Effectuons $L_1 \leftarrow 4L_1$, $L_2 \leftarrow 4L_2$, $L_3 \leftarrow 4L_3$ et $L_1 \leftrightarrow L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\lambda \\ 3 & -4\lambda & 4 \\ -4\lambda & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4\lambda L_1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\lambda \\ 0 & -4\lambda - 3 & 4 + 12\lambda \\ 0 & 3 + 4\lambda & -16\lambda^2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

   On obtient donc finalement la matrice suivante : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\lambda \\ 0 & -4\lambda - 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 + 12\lambda - 16\lambda^2 \end{pmatrix}$.

   Attention, ne parlez pas de réduite de Gauss, ce n'est une réduite de Gauss que si $-4\lambda - 3 \neq 0$, ou si $-4\lambda - 3 = 0$ et $4 + 12\lambda - 16\lambda^2$. Dans les autres cas, la matrice M' n'est pas échelonnée.

   Cette matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, c'est-à-dire si $-4\lambda - 3 \neq 0$ et $4 + 12\lambda - 16\lambda^2 \neq 0$. Ainsi, la matrice M est non inversible si et seulement si $\lambda = -\frac{3}{4}$, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -\frac{1}{4}$. Ainsi, M admet trois valeurs propres : $\mathrm{Spec}(M) = \{1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$.

   On peut d'ors et déjà affirmer que M est diagonalisable, pûisqu'elle admet trois valeurs propres, alors qu'elle est de taille 3. De plus, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Déterminons des bases de ces sous-espaces.

   Sous-espace propre E_1 : E_1 est l'ensemble des solutions de $MX = 0$, donc de $M'X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{L_1 \leftarrow 7L_1 + L_2}{\iff} \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & -12 \\ 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Comme je l'ai déjà dit, cet espace est de dimension 1 ; on a le choix pour z ; cela impose les valeurs de y et de z. Ainsi, $E_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$ (le choix de 7 pour z permet d'éviter les fractions).

   Sous-espace propre $E_{-\frac{1}{4}}$: ce sont les solutions de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $E_{-\frac{1}{4}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

Sous-espace propre $E_{-\frac{3}{4}}$: ce sont les solutions de

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-5\\0&0&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2/5\\ L_3 \leftarrow L_3+9L_2\\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi, $E_{-\frac{3}{4}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

3. Soit f canoniquement associé à M. Alors, dans la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}12\\16\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, la matrice de f est :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

D'après la théorie des changements de base, on a $D = P^{-1}AP$, avec :

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix}12&-3&-1\\16&1&1\\7&2&0\end{pmatrix}.$$

Calculons P^{-1} à l'aide d'un pivot. Dans le but de limiter les calculs, je ne vais pas faire les calculs dans l'ordre habituel (les pivots de la gauche vers la droite).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}12&-3&-1&1&0&0\\16&1&1&0&1&0\\7&2&0&0&0&1\end{array}\right) \; L_1 \leftarrow L_2 + L_1 \; \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}28&-2&0&1&1&0\\16&1&1&0&1&0\\7&2&0&0&0&1\end{array}\right) \; L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}35&0&2&1&1&1\\16&1&1&0&1&0\\7&2&0&0&0&1\end{array}\right) \; \begin{array}{l}L_2 \leftarrow 35L_2 - 16L_1\\ L_3 \leftarrow 5L_3 - L_1\end{array} \; \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}35&0&0&1&1&1\\0&35&35&-16&19&-16\\0&10&0&-1&-1&4\end{array}\right) \; L_2 \leftarrow 2L_2 - 7L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}35&0&0&1&1&1\\0&0&70&-25&45&-60\\0&10&0&-1&-1&4\end{array}\right) \; \begin{array}{l}\text{permutation}\\ \text{normalisation}\end{array} \; \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{35}&\frac{1}{35}&\frac{1}{35}\\0&1&0&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\0&0&1&-\frac{5}{14}&\frac{9}{14}&-\frac{6}{7}.\end{array}\right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{35}&\frac{1}{35}&\frac{1}{35}\\-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\-\frac{5}{14}&\frac{9}{14}&-\frac{6}{7}.\end{pmatrix}$.

4. $M = PDP^{-1}$, d'où

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}12&-3&-1\\16&1&1\\7&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(-\frac{1}{4}\right)^n&0\\0&0&\left(-\frac{3}{4}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{35}&\frac{1}{35}&\frac{1}{35}\\-\frac{1}{10}&\frac{-1}{10}&\frac{2}{5}\\-\frac{5}{14}&\frac{9}{14}&-\frac{6}{7}.\end{pmatrix}.$$

Je vous laisse faire les calculs.

5. Par une récurrence immédiate, $\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix}A_0\\B_0\\C_0\end{pmatrix}$.

En passant à la limite, si on note A, B et C les trois limites, on obtient :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} M^n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = P^{-1} \lim_{n\to+\infty} D^n P = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -1 \\ 16 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35} \\ -\frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{5}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{6}{7}. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{12}{35} & \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} & \frac{16}{35} & \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} & \frac{7}{35} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{12}{35} & \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} & \frac{16}{35} & \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} & \frac{7}{35} & \frac{7}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35}(A_0+B_0+C_0) \\ \frac{16}{35}(A_0+B_0+C_0) \\ \frac{7}{35}(A_0+B_0+C_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} \end{pmatrix}.$$

En particulier, ces probabilités ne dépendent pas de A_0, B_0 et C_0, donc de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

Correction de l'exercice 21 –

1. Le noyau de f est l'ensemble des solutions de $AX = 0$. Trouvons donc une réduite de Gauss de A. Effectuons pour commencer les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_4 \\ \text{normalisation} \end{matrix} \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice échelonnée est de rang 3, donc le noyau de f est de rang 1. Effectuons un pivot double pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3$. On obtient la réduite de Gauss suivante de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, un vecteur non nul (donc une base) de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 3. De plus, $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les quatre colonnes de A. Ainsi, on peut extraire de cette famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Or, les trois premières colonnes sont libres. Elles forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Déterminons $\mathrm{Ker}(f^2)$. Pour cela, calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Trouvons-en une réduite de Gauss. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ et $L_1 \leftarrow -L_1/2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow -L_4/4 \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le choix de la première et de la quatrième coordonnée imposent les autres. Une base du noyau de f^2 est donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

2. N'ayons pas peur des calculs. On effectue un pivot de Gauss sur la matrice $A-\lambda I_4$ pour savoir à quelles conditions sur λ elle est inversible :

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1-\lambda & 1\\ -1 & 1 & -3 & 3-\lambda\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1-\lambda & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1-\lambda & 1\\ -1 & 1 & -3 & 3-\lambda\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-(1-\lambda)L_1\\ L_3 \leftarrow L_3+L_1\\ L_4 \leftarrow L_4+L_1\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & -2+2\lambda-\lambda^2 & \lambda & \lambda-2\\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 2\\ 0 & 2-\lambda & -2 & 4-\lambda\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 2\\ 0 & -2+2\lambda-\lambda^2 & \lambda & \lambda-2\\ 0 & 2-\lambda & -2 & 4-\lambda\end{pmatrix} = B \qquad \begin{array}{l} \boxed{\text{si } \lambda \neq 2}\\ L_3 \leftarrow (2-\lambda)L_3+(2-2\lambda+\lambda^2)L_2\\ L_4 \leftarrow L_4-L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 2\\ 0 & 0 & \lambda^2(1-\lambda) & \lambda^2\\ 0 & 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\end{pmatrix} \qquad L_4 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 2\\ 0 & 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2(1-\lambda) & \lambda^2\end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow (2-\lambda)L_4+\lambda^2(1-\lambda)L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 2\\ 0 & 0 & -2+\lambda & 2-\lambda\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(2-\lambda)^2\end{pmatrix} = C$$

Les calculs ci-dessus ne sont pas valables pour $\lambda = 2$ (car on fait une opération du type $L_i \leftarrow 0L_i$ qui n'est pas inversible). En revanche, ils sont valables pour toutes les autres valeurs de λ. La matrice obtenue est traingulaire supérieure. Elle est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Ainsi, si $\lambda = 0$, elle n'est pas inversible : 0 est valeur propre (ce qu'on savait déjà puisque $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$) ; si $\lambda \notin \{0, 2\}$, elle est inversible, donc λ n'est pas valeur propre.

L'espace propre $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$ a été déterminé dans la question précédente.

Étudions l'autre valeur propre possible, à savoir 2. On reprend le pivot à la matrice B :

$$B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4-L_2\\ L_2 \leftarrow -L_2/2\\ L_3 \leftarrow -L_3/2\\ L_2 \leftrightarrow L_3\end{array} \qquad \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2+L_3\\ L_1 \leftarrow L_1-L_3\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1+L_2 \qquad \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc 2 est valeur propre, E_2 est de dimension 1, engendré par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(f) = \{0, 2\}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres est $2 < 4$, donc f n'est pas diagonalisable.

3. (a) D'après la description de $\mathrm{Ker}(f)$, $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, si $f(e_2) = e_1$, alors $e_2 \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Il faut donc chercher e_2 dans $\mathrm{Ker}(f^2)$. Or

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc prendre $e_2 = (1, 0, 0, 0)$.

De même, e_3 est dans E_2, et $(f - 2\mathrm{id})(e_4) = e_3$, donc $(f - 2\mathrm{id})^2(e_4) = 0$. Il faut donc déterminer le noyau de $(f - 2\mathrm{id})^2$. Pour cela, calculons $(A - 2I_4)^2$:

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1/2 \leftrightarrow -L_2/2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Or :

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_3 + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc prendre $e_4 = (0, 0, 0, -1)$.

(b) La matrice de la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ dans la base canonique est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}$ est une base ssi P est inversible, et dans ce cas, P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Montrons que P est inversible par la méthode du pivot. Effectuons pour commencer les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$. Nous effectuons également les mêmes opérations sur la matrice I_4, puisque notre but est ensuite d'inverser P.

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_4 \leftarrow -L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, P admet une réduite de Gauss inversible, donc est inversible. $\mathcal{B}$ est donc une base, et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}$.

(c) Continuons le pivot précédent pour trouver l'inverse de P. On effectue les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - \frac{1}{2}L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3/2$:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right), \qquad \text{d'où} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) Il n'y a pas besoin de calcul. A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Or,

- $f(e_1) = 0$,
- $f(e_2) = e_1$,
- $f(e_3) = 2e_3$,
- $f(e_4) = e_3 + 2e_4$.

Ainsi, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice A' s'écrit donc par blocs $A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, avec $A_1 = J$ et $A_2 = 2I_2 + J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, ${A'}^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0 \\ 0 & A_2^n \end{pmatrix}$. Il faut donc calculer A_1^n et A_2^n.

On a : $J^2 = 0$, donc $A_1^n = 0$ si $n \geqslant 2$. De plus, I_2 et J commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme pour calculer $(2I_2 + J)^n$:

$$(2I_2 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 J^k = 2^n I_2 + n2^{n-1} J,$$

les autres termes de la somme étant nuls. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$${A'}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit, par un calcul facile :

$$A^n = P{A'}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1}(n-1) & -2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 0 & -2^{n-1}(n-1) & 2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 0 & -2^{n-1}(n-1) & 2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 0 & -2^{n-1}(n+1) & -2^{n-1} & -2^{n-1}(n+2) \end{pmatrix}.$$

(e) Pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{rg}(A^n) = \mathrm{rg}({A'}^n) = 2$. Donc $\dim\ \mathrm{Im}(f^n) = \dim\ \mathrm{Im}(f^2)$. Comme $\mathrm{Im}(f^n) \subset \mathrm{Im}(f^2)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^2)$. De même, $\dim\ \mathrm{Ker}(f^n) = \dim\ \mathrm{Ker}(f^2)$, et comme $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f^n)$, on obtient l'égalité.