Algèbre 7 – Formes bilinéaires, produits scalaires
Correction de quelques exercices

Correction de l'exercice 9 –

- $\varphi(X, X) = (x - 2y)^2 + 3y^2$; c'est un produit scalaire.
- $\varphi(X, X) = (x + 3y)^2$, positif mais non défini. Ce n'est pas un produit scalaire.
- $\varphi(X, X) = (x + 2y)^2 - y^2$, non positif. Ce n'est pas un produit scalaire.
- Le 0 sur la diagonale permet de conclure directement. En effet, le k -ième terme de la diagonale correspond à $\varphi(e_k, e_k)$ (e_k étant le k -ième vecteur de la base canonique). Ainsi, on obtient immédiatement $\varphi(e_2, e_2) = 0$, donc φ n'est pas définie.

Remarquez que le même argument s'applique pour contredire la positivité si la matrice possède un coefficient diagonal négatif.

Ainsi, la matrice d'un produit scalaire (dans n'importe quelle base) possède des coefficients diagonaux tous strictement positifs.

- $\varphi(X, X) = (x + y - z)^2 = (2y + z)^2$. Non défini.
- $\varphi(X, X) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2$. C'est un produit scalaire.
- $\varphi(X, X) = (2x - y + 2z)^2 + (2y - z)^2 + 3z^2$. C'est un produit scalaire.
- (désolé pour les coefficients mal alignés)
 $\varphi(X, X) = (x - y - z + 2t)^2 + (y - t)^2 + (z + t)^2 + t^2$, c'est un produit scalaire.
- $\Phi(X, X) = (x - y + u)^2 + (y - t - u)^2 + (z - t)^2 + (t - u)^2 + 4u^2$. C'est un ps.

Correction de l'exercice 11 –

- Φ est une norme (sans problème!)

Soit φ associée, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ∴ On a

$$N(X) = N(Y) = N(X + Y) = 2, \quad N(Z) = 1, \quad N(X + Z) = 1, \quad N(Y + Z) = 3, \quad N(X + Y + Z) = 3.$$

Ainsi,

- $2\varphi(X, Z) = N(X + Z)^2 - N(X)^2 - N(Z)^2 = 1 - 4 - 1 = -4$,
- $2\varphi(Y, Z) = 9 - 4 - 1 = 4$
- $2\varphi(X + Y, Z) = 9 - 4 - 1 = 4$,

Donc ce n'est pas une norme euclidienne (si $n \geq 2$)

- φ , fb canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

C'est un ps, car $\varphi(X, X) = (x - y + z)^2 + 4y^2 + 3z^2$. Donc Φ est une norme euclidienne.

- Norme euclidienne (canonique) si $p = 2$.

Dans les autres cas : considérer $X = (1, 0, \dots, 0)$, $Y = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $Z = (1, -1, 0, \dots, 0)$. Alors $\varphi(X + Y, Z) = \varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z)$ si et seulement si $2^p + 1 = (\sqrt{5})^p$

On a égalité pour $p = 2$,

- si $p > 2$, $2^p + 1 < 2^{2+(p-2)} + 2^{p-2} = 2^{p-2} \cdot 5 < (\sqrt{5})^{p-2} \cdot 5 = (\sqrt{5})^p$.
- si $p < 2$, $2^p + 1 > 2^{2+p-2} + 2^{p-2} = 2^{p-2} \cdot 5 > (\sqrt{5})^p$.

Ce n'est pas une norme euclidienne.

4. Expression correcte : $\Phi(P) = \sqrt{P(a)^2 + P'(a)^2 + \dots + P^{(n)}(a)^2}$.

C'est une norme euclidienne, associée au ps :

$$\varphi(P, Q) = \sqrt{P(a)Q(a) + P'(a)Q'(a) + \dots + P^{(n)}(a)Q^{(n)}(a)}.$$

Caractère défini : $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \dots + P^{(n)}(a) = 0$, puis $P = 0$ (utiliser la formule de Taylor au point a)

5. norme euclidienne, ps associé : $\varphi(f, g) = \int_0^\pi f(t)g(t) \sin t \, dt$.

caractère défini : stricte positivité de l'intégrale, et continuité des fonctions.

6. Considérer $f = 1, g = \cos, h = 1 - \cos$. Un peu de calcul et une comparaison de racines : ce n'est pas une norme euclidienne.

Correction de l'exercice 13 – On note ψ le produit scalaire associé.

1. $\varphi(X, X) = x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2$

$\psi(X, Y) = xx' - xy' - x'y + 2yy'$; c'est un ps et $\psi(X, X) = \varphi(X, X)$.

ψ est de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Remarquer qu'elle est obtenue de la matrice de ψ est « rééquilibrant » les coefficients afin d'obtenir une matrice symétrique

2. De même, $\varphi(X, X) = (2x - y + z)^2 + (2y + z)^2 + 2z^2$ et ψ de matrice $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. De même, $\varphi(X, X) = (x - y + 2z + t)^2 + (y - 2z - t)^2 + (z + t)^2 + t^2$.

La matrice de ψ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 9 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 14 – Soit $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{1+t^2} \, dt$, définie sur $\mathcal{C}^0([0, 1])^2$.

- La bilinéarité du produit dans $\mathbb{R}$, ainsi que la linéarité de l'intégrale, assurent la bilinéarité de φ .
- La commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ assure la symétrie de φ
- Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, on a :

$$\varphi(f, f) = \int_0^1 \frac{f^2(t)}{1+t^2} \, dt,$$

et la fonction $t \mapsto \frac{f^2(t)}{1+t^2}$ étant positive sur $[0, 1]$, on obtient, par positivité de l'intégrale, $\varphi(f, f) \geq 0$. D'où la positivité de φ .

- De plus, si $\varphi(f, f) = 0$, alors, $t \mapsto \frac{f^2(t)}{1+t^2}$ étant positive et continue sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\forall t \in [0, 1], \frac{f^2(t)}{1+t^2} = 0 \quad \text{donc:} \quad \forall f \in [0, 1], f(t) = 0.$$

Ainsi, φ est définie positive.

Il en résulte que φ est un produit scalaire. Notons-le $\langle -, - \rangle$. Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz associé à ce produit scalaire, on a, pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, en notant $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} \, dt \right| &= |\langle f, \mathbf{1} \rangle| \leq \|\mathbf{1}\| \cdot \|f\| = \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\text{Arctan} \frac{\pi}{4} - \text{Arctan} 0 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si f et $\mathbf{1}$ sont colinéaires, donc si f est constante.

De la même façon, en notant $g : x \mapsto \sqrt{x}$, fonction de $\mathcal{C}^0([0, 1])$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2} dt \right| &= |\langle f, g \rangle| \leq \|g\| \cdot \|f\| = \left(\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{2} \left(\int_0^1 \frac{(f(t))^2}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si f et g sont colinéaires, donc s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t)\lambda\sqrt{t}$.

Remarque : On aurait pu s'en sortir avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$, en considérant le produit scalaire des deux fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ pour la première inégalité, et le produit scalaire de $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^2}}$ et $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ pour la deuxième.