Algèbre 8 – Orthogonalité (1)
Correction de quelques exercices

Correction de l'exercice 9 –

1. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
$$Q(X) = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}y^2 \geqslant 0.$$

2. On a clairement
$$Q(X) = \varphi(X, X),$$
où φ est définie par
$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad \varphi(X, Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} Y.$$
Ainsi, φ est une forme bilinéaire (c'est la forme bilinéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, et elle est symétrique car cette matrice est symétrique.
De plus pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
$$\varphi(X, X) = Q(X) = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}y^2 \geqslant 0,$$
avec égalité si et seulement si chaque terme de cette somme de termes positifs est nul, donc ssi $y = 0$ et $x - \frac{y}{2} = 0$, donc ssi $x = y = 0$, donc ssi $X = 0$.
Ainsi, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire.
On en déduit que N est la norme euclidienne associée au produit scalaire φ.

3. On orthonormalise la base canonique (e_1, e_2) par le procédé de Schmidt, pour le produit scalaire φ. On note (f_1, f_2) la famille obtenue.
   - On conserve la notation N, afin de bien distinguer cette norme de la norme euclidienne canonique. On a :
$$N(e_1)^2 = 2 \qquad \text{donc:} \qquad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   - On pose :
$$u_2 = e_2 - \varphi(e_2, f_1)f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\varphi(e_2, e_1)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
     Ainsi
$$N(u_2)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$
     On en déduit que $f_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 – Soit E l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, +\infty[$, et telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, dt$ converge absolument.

1. D'après le cours, $(f,g) \mapsto \int_0^A f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,A])$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $|f|$ et $|g|$, on a donc :

$$\int_0^A |f(t)g(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^A f^2(t)\ \mathrm{d}t \int_0^A g^2(t)\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, si f et g sont dans E, alors les deux intégrales de droite convergent, et

$$\forall A > 0, \quad \int_0^A |f(t)g(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\ \mathrm{d}t \int_0^{+\infty} g^2(t)\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, $A \mapsto \displaystyle\int_0^A |f(t)g(t)|\ \mathrm{d}t$ est bornée, et comme la fonction intégrée est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|\ \mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument.

2. - E est un sous-ensemble de $\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$.
   - E est non vide car la fonction nulle est dans E
   - Soit f et g dans E, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda f + g)^2 = \lambda^2 f^2 + g^2 + \lambda fg$. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg$ convergent, on obtient la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda f + g)^2$, donc $\lambda f + g \in E$

   Ainsi, E est un sev de $\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$.

3. On a $f_k^2 = \mathrm{e}^{-2kt}$. Cette fonction est continue sur $[0,+\infty[$, de primitive $t \mapsto -\frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-2kt}$, qui admet une limite finie (nulle) en $+\infty$. L'existence de cette limite équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_k^2$. Donc $f_k \in E$.

4. On note (b_1, b_2, b_3) l'orthonormalisée de Schmidt de (f_1, f_2, f_3).
   - $\langle f_1, f_1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u$ (cdv $u = 2t$).
     On reconnait $\Gamma(2)$, d'où $\langle f_1, f_1\rangle = \frac{1}{2}$. Ainsi
     $$b_1 : t \mapsto \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}.$$
   - Soit $u_2 = f_2 - \langle f_2, b_1\rangle b_1 = f_2 - 2\langle f_2, f_1\rangle f_1$.
     Comme plus haut en faisant un changement de variable $u = 3t$,
     $$\langle f_2, f_1\rangle = \frac{1}{3}\Gamma(1) = \frac{1}{3},$$
     donc $u_2 = f_2 - \frac{2}{3}f_1$
     On a alors $u_2^2 = f_4 - \frac{4}{3}f_3 + \frac{4}{9}f_2$. Par des cdv du même type que plus haut, on trouve, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
     $$\int_0^{+\infty} f_k(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{k},$$
     d'où :
     $$\|u_2\|^2 = \frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{36}.$$
     Ainsi, $b_2 = 6f_2 - 4f_1$.
   - Soit $u_3 = f_3 - \langle f_3, b_1\rangle b_1 - \langle f_3, b_2\rangle b_2$ En remplaçant :
     $$\begin{aligned} u_3 &= f_3 - 2\langle f_3, f_1\rangle f_1 - \langle f_3, 6f_2 - 4f_1\rangle (6f_2 - 4f_1) \\ &= f_3 - \frac{1}{2}f_1 - (\frac{6}{5} - 1)(6f_2 - 4f_1) \\ &= f_3 - \frac{1}{2}f_1 - \frac{6}{5}f_2 + \frac{4}{5}f_1 \\ &= \frac{3}{10}f_1 - \frac{6}{5}f_2 + f_3. \end{aligned}$$
     On a alors
     $$\begin{aligned} u_3^2 &= \frac{9}{100}f_2 + \frac{36}{25}f_4 + f_6 - \frac{18}{25}f_3 + \frac{3}{5}f_4 - \frac{12}{5}f_5 \\ &= \frac{9}{100}f_2 + \frac{51}{25}f_4 + f_6 - \frac{18}{25}f_3 - \frac{12}{5}f_5 \end{aligned}$$

Ainsi
$$\|u_3\|^2 = \frac{9}{200} + \frac{51}{100} + \frac{1}{6} - \frac{6}{25} - \frac{12}{25} = \frac{63}{200} + \frac{1}{6} = \frac{289}{600}$$

Donc $\|u_3\| = \frac{17}{10\sqrt{6}}$, d'où
$$b_3 = \frac{\sqrt{6}}{17}(3f_1 - 12f_2 + 10f_3).$$

-

Correction de l'exercice 13 – Les vecteurs $e_1 = (0,1,1,2)$ et $e_2 = (-1,1,0,0)$ étant non colinéaires (et en nombre 2), ils forment une famille libre. Ainsi, ils forment une base de l'espace F qu'ils engendrent. Déterminons une base orthonormale (f_1, f_2) de F, obtenue de (e_1, e_2) par le procédé de Schmidt. On a :
$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,2), \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|},$$
où :
$$u_2 = e_2 - \langle e_2, f_1\rangle f_1 = (-1,1,0,0) - \frac{1}{6}(0,1,1,2) = \frac{1}{6}(-6,5,-1,-2), \qquad \text{donc:} \qquad \|u_2\|^2 = \frac{1}{36}(36+25+1+4) = \frac{66}{36}.$$
Ainsi
$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(-6,5,-1,-2).$$
Le projeté orthogonal de A sur F est donc donné par la formule :
$$p_F(A) = \langle A, f_1\rangle f_1 + \langle A, f_2\rangle f_2 = \frac{2}{3}(0,1,1,2) + \frac{1}{33}(-6,5,-1,-2) = \frac{1}{33}(-6,27,21,42) = \frac{1}{11}(-2,9,7,14).$$
Ainsi,
$$d(A,F) = \|A - p_F(A)\| = \frac{1}{11}\left\|\begin{pmatrix}11\\22\\0\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\9\\7\\14\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{11}\left\|\begin{pmatrix}13\\13\\-7\\-3\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{11}\sqrt{169+169+49+9} = \frac{\sqrt{396}}{11} = \frac{6}{\sqrt{11}}.$$

Correction de l'exercice 14 – Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in E$. On rappelle que la trace de A est la somme des coefficients diagonaux de A, et est notée $\mathrm{tr}(A)$.

1. (a) La trace est une application de E dans $\mathbb{R}$.

   Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.. Par conséquent,
$$\mathrm{tr}(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \lambda b_{i,i} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \mathrm{tr}(A) + \lambda\,\mathrm{tr}(B).$$
   Ainsi, tr est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, donc une $\boxed{\text{forme linéaire sur } E.}$

   (b) Avec les mêmes notations que ci-dessus, et en notant $AB = (c_{i,k})_{1\leqslant i,k\leqslant n}$ et $BA = (d_{i,k})_{1\leqslant i,k\leqslant n}$, on a, pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$:
$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k},$$
   et par conséquent,
$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n d_{j,j} = \mathrm{tr}(BA).$$
   Ainsi, on a bien $\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)}$.

   (c) Soit A et B deux matrices semblables. Il existe donc une matrice inversible P dans E, telle que $B = P^{-1}AP$. Ainsi,
$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

(d) La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ainsi, 1 et 2 ne sont pas les seules valeurs propres, la somme des dimensions des sous-espaces propres associés n'étant pas égale à 3.

De plus, étant d'ordre 3, A admet au plus 3 vecteurs propres. Ainsi, A admet exactement 3 valeurs propres, et la dimension des espaces propres correspondant est 1.

Soit λ la troisième valeur propre. La matrice A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et d'après la question précédente :

$$0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda + 3, \qquad \text{donc:} \qquad \lambda = -3.$$

Le spectre de A est donc $\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{1, 2, -3\}}$.

2. • Pour tout $(A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle \in \mathbb{R}$.
   • Pour tout $(A, B) \in E^2$,
   $$\langle B, A \rangle = \operatorname{tr}(\,{}^tBA) = \operatorname{tr}(\,{}^t(\,{}^tBA)) = \operatorname{tr}(\,{}^tAB) = \langle A, B \rangle\,,$$
   car la trace ne dépend que des coefficients diagonaux, et que ceux-ci sont laissés invariants par la transposition. Ainsi, $\langle , \rangle$, est symétrique.
   • Pour tout $(A, B, C) \in E^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\langle A, \lambda B + C \rangle = \operatorname{tr}(\,{}^tA(\lambda B + C)) = \operatorname{tr}(\lambda\,{}^tAB + \,{}^tAC) = \lambda \operatorname{tr}(\,{}^tAB) + \operatorname{tr}(\,{}^tAC) = \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle\,,$$
   par linéarité de la trace. Ainsi $\langle , \rangle$ est linéaire par rapport à la seconde variable, et symétrique, donc aussi linéaire par rapport à la première variable.
   • Soit $A \in E$. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, ${}^tA = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et ${}^tAA = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, on a $b_{i,j} = a_{j,i}$, et
   $$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2, \quad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} a_{j,k}.$$
   Par conséquent,
   $$\langle A, A \rangle = \operatorname{tr}(\,{}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geqslant 0,$$
   en tant que somme de termes positifs, le cas d'égalité étant obtenu si et seulement si chacun de ces termes positifs est nul, donc si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 = 0$, donc $a_{i,j} = 0$, donc $A = 0$.

   Ainsi $\boxed{\langle , \rangle \text{ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive, donc c'est un produit scalaire}}$.

   Un calcul semblable à celui ayant permis d'expliciter $\langle A, A \rangle$ amène, avec les mêmes notations que dans les questions précédentes,
   $$\boxed{\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{j,i}}.$$

3. Soit $n = 3$. Soit :
   $$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda J + \mu K + \nu L = 0$, esoit :
   $$\begin{pmatrix} \lambda + \mu + \nu & \lambda + \nu & 0 \\ 0 & \lambda + \mu + \nu & \mu + \nu \\ 0 & 0 & \lambda + \mu + \nu \end{pmatrix} = 0$$
   Cela équivaut au système :
   $$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu & = 0 \\ \lambda + \nu & = 0 \\ \mu + \nu & = 0 \end{cases}$$

En retranchant respectivement la deuxième et la troisième équation de la première, on obtient $\mu = \lambda = 0$, puis $\nu = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (J, K, L) \text{ est libre}}$.

(b) On procède à une orthonormalisation de la famille libre (J, K, L). Pour effectuer les calculs de produits scalaires, on peut soit effectuer tous les produits matriciels, pour revenir à la définition du produit scalaire, soit revenir à la description par les coefficients obtenue un peu plus haut (somme des produits deux à deux des coefficients des matrices). Cela permet aussi de calculer les normes de façon usuelle (racine de la somme des carrés des coefficients de la matrice).

Soit (E, F, G) la famille obtenue par orthonormalisation au sens de Schmidt de (J, K, L). On obtient alors, à l'issue de calculs sans réelle difficulté :

- $E = \frac{J}{\|J\|} = \frac{1}{2}J$, donc $\boxed{E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.
- $F = \frac{U}{\|U\|}$, où
$$U = K - \frac{1}{4}\langle K, J\rangle J = K - \frac{3}{4}J = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a alors $\|U\|^2 = \frac{28}{4^2}$, donc $\boxed{F = \frac{1}{\sqrt{28}}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$
- $G = \frac{V}{\|V\|}$, où
$$V = L - \frac{1}{4}\langle L, J\rangle J - \langle L, F\rangle F = L - J - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
On a alors $\|V\|^2 = \frac{21}{7^2}$, donc $\boxed{G = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

(c) Vous pouvez bien sûr utiliser la formule du projeté orthogonal, connaissant une b.o.n. de l'espace sur lequel vous projetez, où alors contater que $I_3 = J + K - L$, et donc que $I_3 \in \mathrm{Vect}(J, K, L)$, Ainsi, $\boxed{\text{le projeté orthogonal de } I_3 \text{ sur Vect(}}$

Correction de l'exercice 15 – Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $Q_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre).

1. C'est quasiment du cours...
2. Sans difficulté :
$$Q_0 = 1 \qquad Q_1 = 2X \qquad Q_2 = 12X^2 - 4.$$
3. On a $P_n = (X - 1)^n(X + 1)^n$, donc 1 et -1 sont les seules racines de P_n, d'ordre de multiplicité n chacune.
4. On a $\deg(P_n) = 2n$, donc, en dérivant n fois, $\deg(Q_n) = 2n - n = n$.
Le monôme dominant de Q_n est obtenu en dérivant n fois le monôme dominant de P_n, qui est X^{2n}. Ainsi, le monôme dominant de Q_n est $(2n)(2n - 1)\cdots(n + 1)X^n$.
On en déduit que le coefficient dominant de Q_n est $\frac{(2n)!}{n!}$.
5. L'initialisation (pour $k = 0$) est triviale.
Soit $k \in [\![0, n - 1]\!]$ tel que $P_n^{(k)}$ admet k racines distinctes au moins, notée $-1 < r_1 < \cdots < r_k < 1$, après les avoir ordonnées. Comme -1 et 1 sont racines de multiplicité $n > k$ de P_n, elles sont racines de $P_n^{(k)}$. Ainsi
$$P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(r_1) = \cdots = P_n^{(k)}(r_k)_n^{(k)}(1) = 0,$$
et, en appliquant le théorème de Rolle sur les $k + 1$ intervalles ainsi définis, la fonction $P_n^{(k)}$ étant de calsse $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $k + 1$ racines (au moins) de $P_n^{(k+1)}$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a bien le résultat attendu.

6. On a, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant m$:

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x) P_m^{(m)}(x) \, \mathrm{d}x.$$

On montre à partir de cela que pour tout $k \in [\![0, m]\!]$,

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(x) P_m^{(m+k)} \, \mathrm{d}x,$$

la définition de $\langle Q_n, Q_m \rangle$ fournissant l'initialisation.

Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$ tel que l'expression soit vérifiée au rang k. Toutes les fonctions considérées étant $\mathcal{C}^\infty$, on peut intégrer par parties, et on obtient :

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^k \Big[P_n^{(n-k-1)}(x) P_m^{(m+k)}(x) \Big]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k-1)} P_m^{(m+k+1)}(x) \, \mathrm{d}x.$$

Or, 1 et -1 sont racines d'ordre n de P_n, donc

$$P_n^{(n-k-1)}(-1) = P_n^{(n-k-1)}(1) = 0.$$

Ainsi

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k-1)} P_m^{(m+k+1)}(x) \, \mathrm{d}x.$$

D'après le principe de récurrence, on a bien pour tout $k \in [\![0, m]\!]$,

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(x) P_m^{(m+k)} \, \mathrm{d}x,$$

En particulier, pour $k = m$, puisque $P_m^{(2m)} = (2m)!$ (car le monôme dominant de P_m est X^{2m}), on obtient :

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} P_n^{(n-m)}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n > m$, on a alors (puisque $n - m - 1 \geqslant 0$) :

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^m (2m)! \Big[P_n^{(n-m-1)}(x) \Big]_{-1}^{1} = 0,$$

toujours à cause de la multiplicité de 1 et -1.

Donc la famille (Q_n) est orthogonale.

7. De plus en utilisant (6) avec $n = m$

$$\langle Q_n, Q_n \rangle = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} P_n(t) \, \mathrm{d}t = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (t-1)^n (t+1)^n \, \mathrm{d}t.$$

Le calcul de cette dernière intégrale est un grand classique (à savoir faire). Notons, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$J(p,q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q \, \mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties (à justifier) amène directement, si $p > 0$:

$$J(p,q) = -\frac{p}{q+1} J(p-1, q+1).$$

Ainsi, en itérant cela jusqu'à ce que le premier argument soit nul :

$$J(p,q) = (-1)^p \frac{p(p-1)\cdots 1}{(q+1)\cdots(q+p)} J(0, q+p) = (-1)^p \frac{p!q!}{(p+q)!} \int_{-1}^{1} (1+t)^{p+q} \, \mathrm{d}t = (-1)^p \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \frac{2^{p+q+1}}{p+q+1}.$$

On obtient donc

$$\langle Q_n, Q_n \rangle = (-1)^n (2n)! J(n,n) = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{donc:} \qquad \|Q_n\| = \frac{n! 2^n \sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}.$$

8. Puisque $(Q_0,\dots,Q_n)$ est orthogonale, il en est de même de $(W_0,\dots,W_n)$. De plus, d'après le calcul du degré de Q_k, la famille $(W_0,\dots,W_n)$ est échelonnée en degré, avec $\deg(W_i)=i$, pour tout $i\in[\![0,n]\!]$. Par conséquent, elle forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Enfin, par construction, les W_i sont des vecteurs unitaires. Il s'agit donc bien d'une base orethonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Montrons par récurrence sur n qu'il s'agit de l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique. Pour $n=0$, c'est évident puisque $Q_0=1$ et $W_0=\frac{Q_0}{\|Q_0\|}$.

   Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie. Alors, le $n+1$-ième vecteur f_{n+1} de l'orthonormalisée de Schmidt de $(1,X,\cdots X^{n+1})$ est défini par

$$f_{n+1}=\frac{X^{n+1}-\sum\limits_{k=0}^{n}\left\langle X^{n+1},W_k\right\rangle W_k}{\|X^{n+1}-\sum\limits_{k=0}^{n}\left\langle X^{n+1},W_k\right\rangle W_k\|}.$$

   Ce vecteur est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$, tout comme W_{n+1} (qui est orthogonal à $\mathrm{Vect}(W_0,\dots,W_n)=\mathbb{R}_n[X]$). Comme ce supplémentaire est de dimension 1, f_{n+1} et W_n sont colinéaires. Comme ils sont tous les deux unitaires, on a soit $f_{n+1}=W_{n+1}$, soit $f_{n+1}=-W_{n+1}$. Écrivons $f_{n+1}=\varepsilon W_{n+1}$, où $\varepsilon=\pm1$.

   On a alors

$$\langle f_{n+1},W_{n+1}\rangle=\varepsilon\langle f_{n+1},f_{n+1}\rangle=\varepsilon.$$

   Calculons ce produit scalaire avec la formule définissant f_{n+1}. On a :

$$\langle f_{n+1},W_{n+1}\rangle=\frac{\left\langle X^{n+1},W_{n+1}\right\rangle-\sum\limits_{k=0}^{n}\left\langle X^{n+1},W_k\right\rangle\langle W_k,W_{n+1}\rangle}{\|X^{n+1}-\sum\limits_{k=0}^{n}\left\langle X^{n+1},W_k\right\rangle W_k\|}.$$

   Les W_i étant orthogonaux, en notant α le dénominateur ($\alpha>0$), on obtient

$$\langle f_{n+1},W_{n+1}\rangle=\frac{\left\langle X^{n+1},W_{n+1}\right\rangle}{\alpha}=\frac{\left\langle X^{n+1},Q_{n+1}\right\rangle}{\alpha\|Q_{n+1}\|}.$$

   Or,

$$\left\langle X^{n+1},Q_{n+1}\right\rangle=\int_{-1}^{1}t^{n+1}P_{n+1}^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t,$$

   et, en effectuant $n+1$ intégrations par partie, sur le même principe que dans la question 6, on obtient :

$$\left\langle X^{n+1},Q_{n+1}\right\rangle=(-1)^{n+1}(n+1)!\int_{-1}^{1}P_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t=(-1)^{n+1}(n+1)!J(n+1,n+1).$$

   Le facteur $(-1)^{n+1}$ de l'expression de $J(n+1,n+1)$ nous assure que

$$\left\langle X^{n+1},Q_{n+1}\right\rangle>0\qquad\text{donc:}\qquad\langle f_{n+1},W_{n+1}\rangle>0\qquad\text{donc:}\qquad\varepsilon>0.$$

   Comme $\quad=\pm1$, on en déduit que $\varepsilon=1$, puis que $f_{n+1}=W_{n+1}$.

   Fin de la récurrence...

   Beau raisonnement, qu'il est bon de connaître...

Correction de l'exercice 17 –

Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $u=(u_n)_{n\in N}$ telles que la série de terme général u_n^2 , $n\in N$ converge.

On rappelle (voir feuille 3) que le produit terme à terme de deux suites de ℓ^2 est encore dans ℓ^2, que ℓ^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que l'on définit un produit scalaire sur ℓ^2 par :

$$\forall(u,v)\in\ell^2,\quad\langle u,v\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n.$$

Soit F l'ensemble des suites de E nulles à partir d'un certain rang.

1. $F \subset \ell^2$ car si $(u_n) \in F$, la somme $\sum u_n^2$ est finie, donc convergente. La suite nulle est dans ℓ^2 et toute combinaison linéaire de deux suites nulles à partir d'un certain rang est également nulle à partir d'un certain rang (le maximum des rangs des deux suites de la combinaison)

   Donc F est un sev de ℓ^2.
2. Le vecteur e_1 est dans F (donc dans ℓ^2), car nulle à partir du rang $i+1$.

   Soit $(\lambda_0, \cdots \lambda_n)$ des scalaires tels que $\lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$. La suite $\lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n$ est la suite $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots)$. Cette suite est nulle si et seulement si tous les coefficients λ_i sont nuls.

   Donc $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, puisqu'on peut prendre n aussi grand qu'on veut, il existe dans F des familles libres de cardinal aussi grand qu'on veut, donc F n'est pas de dimension finie (sinon le cardinal des familles libres est borné par la dimension de F).
3. Soit $(u_n) \in F$. Il existe N tel que $u_n = 0$ pour tout $n > N$. Ainsi, $(u_n) = (u_0, u_1, \ldots, u_N, 0, \ldots)$. Donc

   $$(u_n) = u_0 e_0 + u_1 e_1 + \cdots + u_N e_N.$$

   Donc (u_n) est CL d'un nombre fini de suites de la famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
4. Soit $(v_n) \in F^\perp$. Alors en particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(v_n) \perp e_i$. Or, par définition du produit scalaire,

   $$\langle (v_n), e_i \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k (e_i)_k = v_i,$$

   car le k-ième terme $(e_i)_k$ de la suite e_i est nul, sauf si $k=1$, dans lequel cas il vaut 1.

   Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $v_i = 0$, donc (v_n) est la suite nulle.

   Ainsi, la seule suite orthogonale à F est la suite nulle, donc $F^\perp = \{0\}$.

   On a alors $F \oplus F^\perp = F \neq \ell^2$, puisqu'il existe dans ℓ^2 des suites qui ne sont pas nulles à partir d'un certain rang (comme $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par exemple, puisque $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre 2).

   Donc F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

   On a d'ailleurs aussi $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \ell^2$, donc $(F^\perp)^\perp \neq F$.

   Les propriétés $F \oplus F^\perp = E$ et $(F^\perp)^\perp = F$, propriétés vraies en dimension finie, ne sont donc pas nécessairement vraies en dimension infinie.

Correction de l'exercice 18 –

1. Tout d'abord, $\mathrm{tr}(A)$ est une somme de réels donc un réel. Ainsi, tr est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

   Montrons sa linéarité. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

   Par conséquent,

   $$\mathrm{tr}(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda b_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \mathrm{tr}(A) + \lambda\, \mathrm{tr}(B).$$

   Ainsi, tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

   Avec les mêmes notations pour les matrices A et B, on a, d'après la définition du produit matriciel :

   $$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}\right)_{1\leqslant i,k\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad BA = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,k}\right)_{1\leqslant i,k\leqslant n}.$$

   Donc

   $$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i},$$

   et

   $$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,i} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} b_{\ell,m} a_{m,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{m,\ell} b_{\ell,m} = \mathrm{tr}(AB),$$

   les variables de sommation étant des variables muettes (le changement d'indices effectué a pour but de ne pas mélanger les i et j de cette expression avec les i et j de l'expression de $\mathrm{tr}(AB)$ qui sont échangés par rapport à ceux-ci)

2. La trace est une application linéaire non nulle (par exemple $\operatorname{tr} I_n = n$), donc $\operatorname{Im}\operatorname{tr} \neq \{0\}$, donc $\dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} \geqslant 1$. Comme $\operatorname{Im}\operatorname{tr} \subset \mathbb{R}$, on a aussi $\dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} \leqslant 1$, d'où $\dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} = 1$, et l'inclusion $\operatorname{Im}\operatorname{tr} \subset \mathbb{R}$ se faisant avec égalité des dimensions, on a une égalité $\operatorname{Im}\operatorname{tr} = \mathbb{R}$. Donc tr est surjective.
   Plus simplement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut constater que $\lambda = \operatorname{tr}\left(\dfrac{\lambda}{n} I_n\right)$, ce qui prouve la surjectivité.
   Ainsi, $\dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} = 1$, et donc, d'après le théorème du rang, l'espace initial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie n^2,
$$\dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} = n^2 - 1.$$

3. Montrons que φ est un produit scalaire. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - $\varphi(B, A) = \operatorname{tr}(\,{}^tBA) = \operatorname{tr}(\,{}^t(\,{}^tBA)) = \operatorname{tr}(\,{}^tAB) = \varphi(B, A)$,
     car la transposition laisse invariant les coefficients diagonaux, donc la trace. Donc φ est symétrique
   - Pout la bilinéarité, il sufft donc de prouver la linéarité par rapport à une variable.
$$\varphi(A, B + \lambda C) = \operatorname{tr}(\,{}^tA(B + \lambda C)) = \operatorname{tr}(\,{}^tAB + \lambda\,{}^tAC) = \operatorname{tr}(\,{}^tAB) + \lambda \operatorname{tr}(\,{}^tAC) = \varphi(A, B) + \lambda\varphi(A, C),$$
     par linéarité de la trace. Vous remarquerez qu'étudier la linéarité par rapport à la seconde variable m'évite de recourir à des propriétés de linéarité de la transposition.
     Ainsi, φ est bilinéaire.
   - On a
$$\varphi(A, A) = \operatorname{tr}(\,{}^tAA) = \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}a_{j,k}\right)_{1\leqslant i,k\leqslant n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geqslant 0,$$
     en tant que some de carrés de réels, donc de termes positifs. Donc φ est positive
   - Supposons que $\varphi(A, A) = 0$. Alors
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = 0.$$
     Or une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Ainsi,
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{j,i}^2 = 0 \qquad \text{soit:} \qquad a_{i,j} = 0.$$
     Par conséquent, $A = 0$.
     Ainsi φ est définie.

   L'application φ étant bilinéaire symétrique définie positive, c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Cette vérification est à savoir faire impérativement
   De plus, on a vu en cours de calcul que
$$\|A\|^2 = \operatorname{tr}(\,{}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2,$$
   en échangeant les noms des variables i et j (qui sont muettes), puis, en inversant les deux signes sommes :
$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\|\operatorname{tr}(A)| = |\operatorname{tr}(\,{}^tI_nA)| = |\varphi(I_n, A)| \leqslant \|I_n\| \cdot \|A\|.$$
   Or $\|I_n\|^2 = \operatorname{tr}(\,{}^tI_n \cdot I_n) = \operatorname{tr}(I_n) = n$, donc
$$\|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n} \cdot \|A\|.$$

5. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Alors
$$\varphi(S, A) = \operatorname{tr}(\,{}^tSA) = \operatorname{tr}(SA),$$
   puisque S est symétrique, et de même,
$$\varphi(A, S) = \operatorname{tr}(\,{}^tAS) = \operatorname{tr}(-AS) = -\operatorname{tr}(AS),$$

puisque A est antisymétrique. Ainsi, par la propriété de la trace montrée dans la question 1,

$$\varphi(A,S) = -\operatorname{tr}(SA) = -\varphi(S,A).$$

La fonction φ étant symétrique, on en déduit que

$$phi(A,S) = \varphi(S,A) = 0.$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$ et tout $A \in A_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R})$.

En particulier, $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ est une somme directe. Il ne reste plus qu'à montrer que cette somme est égale à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tout entier, pour montrer la supplémentarité.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Une vérification immédiate prouve que $\frac{M + {}^tM}{2}$ est symétrique et $\frac{M - {}^tM}{2}$ est antisymétrique. Donc M est bien la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R}) + S_n(\mathbb{R}).$$

L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient l'égalité. Le caractère direct de cette somme à déjà été prouvé, donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}),$$

la somme étant orthogonale. Ainsi, $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. D'après un résultat du cours, la quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \|A - M\|^2$ est minimale quand M parcourt $S_n(\mathbb{R})$, lorsque M est le projeté orthogonal de A sur $\S_n(\mathbb{R})$. En particulier, le minimum de cette quantité existe, puisqu'on est en dimension finie, et que les projetés orthogonaux existent dans ce contexte.

   Or, d'après la relation déjà utilisée dans la question précédente :

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2},$$

   et puisque $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux, on en déduit que le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$ est

$$M_0 = \frac{A + {}^tA}{2}.$$

   Ainsi,

$$\min_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \|A - M_0\|^2 = \left\|\frac{A - {}^tA}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|A - {}^tA\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Correction de l'exercice 19 – (Polynômes de Tchebychev et orthogonalité)

1. Une fonction polynomiale étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Ainsi, les seules impropretés éventuelles sont en -1 et en 1.

   On a, pour tout $t \in]-1,1[$

$$\frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}.$$

   Ainsi, P étant continue sur $[0,1]$, donc bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in]-1,0], \quad \left|\frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \leqslant \frac{M}{\sqrt{1+t}}.$$

   Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}}$ est une intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} < 1$ en -1, donc elle est convergente. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

Une étude similaire montre la convergence en 1.

Attention à la tentation d'écrire

$$\frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{-1}{\sim} \frac{P(-1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}},$$

afin d'utiliser le théorème de comparaison par équivalences. En effet, cet équivalent n'est valable que sous la condition que $P(-1) \neq 0$, et l'utilisation de cet équivalent ne permet pas de montrer la convergence pour les polynômes dont -1 est racine.

2. Je me dispense de la bilinéarité et la symétrie de $\langle -,- \rangle$, provenant de la linéarité de l'intégrale impropre (puisque toutes les intégrales en jeu sont convergentes) et de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.

   La positivité se montre comme dans l'exercice 1.

   La définie positivité repose également sur le même argument que dans l'exercice 1, la positivité de l'intégrale étant aussi valable pour les intégrales impropres. Ainsi, si $\langle P, P\rangle = 0$, on obtient :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad P(t) = 0,$$

   donc P est un polynôme admettant une infinité de racines, donc $P = 0$.

   Ainsi, il s'agit bien d'un produit scalaire.

3. Question **archi-archi-classiquissime**

   Soit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \ T_k(\cos x) = \cos(kx)$.

   - Soit $x \in \mathbb{R}$; $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0) = \cos(0x)$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$; $T_1(\cos x) = \cos x = \cos(1x)$. D'où $\mathcal{P}(1)$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ soient vérifiés. Alors, d'après la relation de récurrence satisfaite par les T_k, et d'après les formules de trigonométrie, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{k+2}(\cos x) &= 2\cos x T_{k+1}(\cos x) - T_k(\cos x) = 2\cos x \cos((k+1)x) - \cos(kx) \\ &= \cos((k+1)x + x) + \cos((k+1)x - x) - \cos(kx) = \cos((k+2)x) \end{aligned}$$

     D'où $\mathcal{P}(k+2)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ entraînent $\mathcal{P}(k+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $\mathbb{N}$.

4. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $i \neq j$. Alors

$$\langle T_i, T_j\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t.$$

   On effectue un changement de variables $t = \cos x = \varphi(x)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, strictement décroissante. De plus, $\mathrm{d}t = -\sin x\ \mathrm{d}x$, d'où

$$\langle T_i, T_j\rangle = -\int_0^{\pi} \frac{T_i(\cos x)T_j(\cos x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(ix)\cos(jx)\ \mathrm{d}x,$$

   puisque $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x$, puisque $x \in [0,\pi]$ et que le sinus est positif sur cet intervalle.

   Ainsi, en utilisant à nouveau la formule trigonométrique pour le produit de deux cosinus :

$$\langle T_i, T_j\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((i+j)x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((i-j)x) = \frac{1}{2(i+j)}\Big[\sin((i+j)x)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2(i-j)}\Big[\sin((i-j)x)\Big]_0^{\pi} = 0$$

   Ainsi, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Comme ces vecteurs sont non nuls, et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, on peut en conclure (même si ce n'est pas demandé) qu'il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. C'est un calcul similaire au précédent. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a comme avant :

$$\|T_k\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2kx))\ \mathrm{d}x.$$

   On discute alors suivant la valeur de k :

- Si $k = 0$, alors $\|T_0\|^2 = \pi$, donc $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.
- Si $k \neq 0$, alors

$$\|T_k\|^2 = \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{1}{2k}\sin(2kx)\Big]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $\|T_k\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$