Algèbre 9 – Orthogonalité (2) Feuille technique
Quelques corrections

Correction de l'exercice 1 – On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On trouve :

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{7}}(X^2+1), \frac{\sqrt{7}}{2}(16X^3-15X^2+1)\right)$.
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.\right)$.

   Remarquez qu'on aurait pu répondre plus simplement, l'espace considéré étant ici $\mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_4)$, qui est orthonormale !
5. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$
6. On orthonormalise la base canonique :

   $M_\varphi = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$, résultat : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.
7. On orthonormalise la base canonique :

   $M_\varphi = \begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\-2 & 5 & 1\\2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, résultat : $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}\right)$.
8. On orthonormalise la base canonique $(1, X, X^2)$: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1), \frac{1}{\sqrt{1661}}(6X^2-27X-10)\right)$

Correction de l'exercice 2 – Suivant la base de $F^\perp$ de laquelle on part, on pourra obtenir différentes bases orthonormales. Les résultats que je donne ne sont donc pas uniques.

1. $F_1^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, puis bon : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}.\right)$
2. $F_2^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, donc bon : $\left(\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$.
3. $F_3^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

   Solution : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)$.

   Ici, l'ordre des vecteurs de la base initiale est important. Si on inverse l'ordre, les calculs seront beaucoup plus durs (commencer par les vecteurs les plus simples, ceux dont la norme s'exprime le plus simplement possible).

4. Une base de $F_4^\perp$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$. On inverse l'ordre pour l'orthonormalisation (afin de considérer en premier le vecteur le plus simple des deux). Après orthonormalisation, on obtient une b.o.n. de $F_4^\perp$: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$.

5. $F_5^\perp = \mathbb{R}1{-}21$, réponse : $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$

6. $F_6^\perp = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$: en effet, les deux équations, réécrites sous forme d'un produit scalaire, montrent que ces vecteurs sont orthogonaux à F. C'est alors une base de $F^\perp$ par un argument de dimension.
   Résultat : $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

7. Poser $P = aX^3+bX^2+cX+d$. L'orthogonalité avec X s'exprime par $12a+15b+20c+30d = 0$ et l'orthogonalité avec X^2 par $10d+12a+15b+20c = 0$. La résolution de ce système amène :

$$F_7^\perp = \text{Vect}\left(X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{3}{10}, X^3 - \frac{6}{5}X + \frac{4}{10}\right).$$

   Notons (e_1, e_2) ces deux vecteurs et (f_1, f_2) l'orthonormalisée de Schmidt.
   On obtient $\|e_1\| = \frac{1}{10}$, donc $f_1 = 10X^2 - 12X + 3$.
   On obtient par le calcul $\langle e_2, f_1\rangle = \frac{2}{5}$,, donc

$$u_2 = X^3 - 4X^2 + \frac{18}{5}X - \frac{4}{5}.$$

   Enfin, $\|u_2\| = \sqrt{11}175$ si je ne me suis pas trompé, et donc

$$f_2 = \sqrt{\frac{7}{11}} \cdot 5 \cdot (X^3 - 4X^2 + \frac{18}{5}X - \frac{4}{5}.) = \sqrt{\frac{7}{11}}(5X^3 - 4X^2 + 18X - 4).$$

Correction de l'exercice 5 – Le coefficient (i,k) du produit ${}^tAB$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{j,i}b_{j,k}$ (attention à l'inversion des indices du premier terme par rapport à la formule usuelle du produit, provenant de la transposition de la matrice A). Ainsi

$$\text{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j}.$$

Cela correspond donc au produit terme à terme des coordonnées des matrices A et B. Cette remarque permet de faire les calculs assez simplement (sans avoir à calculer explicitement les produits matriciels)
On obtient alors, pour l'orthonormalisée (F_1, F_2, F_3) :

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

puis

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{1170}}\begin{pmatrix}5 & 9 & 5\\18 & 1 & 17\\0 & -8 & 19\end{pmatrix}$$

et enfin (avec un peu de courage et une calculatrice) :

$$F_3 = \frac{1}{2\sqrt{152815}} \begin{pmatrix} 80 & 209 & 210 \\ 418 & 341 & 77 \\ -260 & -128 & 369 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 6 – (Exercice technique) Les questions sont indépendantes.

1. • La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre, comme on s'en assure facilement (vérification à faire rapidement dans une copie). On note e_1, e_2 et e_3 les 3 vecteurs de cette famille. Ils forment une base de F. On trouve une base orthonormale de F en artonormalisant cette famille. On note (f_1, f_2, f_3) la famille obtenue. Je ne donne pas les détails des calculs (à faire sur une copie). On trouve :

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{190}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \frac{1}{2\sqrt{437}} \begin{pmatrix} 33 \\ 9 \\ -17 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

• Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ est dans $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal aux 3 vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la base de F. Ces trois orthogonalités s'expriment par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + y - t &= 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système (exprimez tout en fonction de t), on trouve

$$X = \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $F^\perp$, et en le divisant par sa norme, on obtient une base orthonormale : $\left(\frac{1}{2\sqrt{23}} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

2. On remarque tout d'abord que les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ du plan (qu'on note P) sont caractérisés par $X \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi :

$$P^\perp = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

   Plusieurs méthodes sont possibles :
   • Trouver une base de P l'orthonormaliser etc. C'est lourd en calculs (il faut orthonormaliser une famille de 3 vecteurs). Ce n'est pas conseillé ici.

- Utiliser la définition du projeté orthogonal d'un vecteur, donc la colinéarité de $X - P(X)$ et de $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui permet d'exprimer $P(X)$ en fonction de X et d'un scalaire λ, puis utiliser l'équation qui donne l'appartenance de $P(X)$ à P pour déterminer λ en fonction des coordonnées de X. Cela se fait, ce n'est pas très long.
- Le plus rapide ici est certainement de commencer par déterminer la matrice du projeté orthogonal q sur $P^{\perp}$, et d'utiliser la relation $p + q = \mathrm{id}$.

  Une base orthonormale de $F^{\perp}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi, en notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

$$q(e_1) = \frac{1}{10} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

  Un calcul immédiat amène aussi :

$$q(e_2) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad q(e_3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad q(e_4) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

  Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{bc}(q) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(q) = I_4 - \mathrm{Mat}_{bc}(p) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Soit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, et soit $F = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$. Comme (b_1, b_2) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et forme donc une base de F. Soit (f_1, f_2) l'othonormalisée de Schmidt de (b_1, b_2).

- On a : $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Soit $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors : $f_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule alors les projetés $p(e_1)$, $p(e_2)$, $p(e_3)$ et $p(e_4)$ des 4 vecteurs de la base canonique :

$$p(e_1) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{19} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient de même :

$$p(e_2) = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad p(e_3) = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 32 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad p(e_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix},$$

d'où l'expression de la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(p) = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 21 & 17 & -8 & -2 \\ 17 & 21 & 8 & 2 \\ -8 & 8 & 32 & 8 \\ -2 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

4. En exprimant les coefficients diagonaux de ${}^{t}AB$ à l'aide des coefficients de A et de B, il vient immédiatement :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Cette expression permet de faire assez simplement les calculs de produits scalaires qui interviennent dans cette question.

Tour d'abord, en notant A et B les matrices de l'énoncé, et (C, D) la famille obtenue par orthonormalisation de la famille (A, B), on a :

$$C = \frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{5}A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, soit

$$U = B - 125\,\langle B, A\rangle\, A = B - \frac{3}{25}A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 72 & -6 & -44 & 28 \\ 19 & 50 & 0 & 19 \\ -28 & 25 & 22 & 50 \\ -50 & 19 & -25 & 28 \end{pmatrix}$$

On a $\|U\| = \frac{1}{25}\sqrt{19825}$, d'où :

$$D = \frac{1}{5\sqrt{793}}\begin{pmatrix} 72 & -6 & -44 & 28 \\ 19 & 50 & 0 & 19 \\ -28 & 25 & 22 & 50 \\ -50 & 19 & -25 & 28 \end{pmatrix}$$

On trouve alors le projeté orthogonal $p(I_4)$ avec un peu de patience, un peu de courage et une calculatrice...

$$p(I_4) = \langle I_4, C\rangle\, C + \langle I_4, D\rangle\, D = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{172}{19825}\begin{pmatrix} 72 & -6 & -44 & 28 \\ 19 & 50 & 0 & 19 \\ -28 & 25 & 22 & 50 \\ -50 & 19 & -25 & 28 \end{pmatrix},$$

et, après quelques minutes de pianotage sur la calculatrice :

$$p(I_4) = \frac{1}{19825}\begin{pmatrix} 13177 & 554 & 5982 & 4023 \\ 4854 & 8600 & 0 & 4854 \\ -4023 & 4300 & 4577 & 8600 \\ -8600 & 4854 & -4300 & 4023 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 7 –

1. • La fonction φ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]^2$, car pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)\sin x$ est continue sur $[0, \pi]$, donc intégrable.
   • La fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2[X]$ est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
   • La bilinéarité de φ provient des propriétés de distributivité et de la linéarité de l'intégrale.
   • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors
   $$\varphi(P, P) = \int_0^{\pi} P^2(x)\sin x\ \mathrm{d}x.$$
   Or, la fonction $x \mapsto P^2(x)\sin x$ est positive sur $[0, \pi]$, donc $\varphi(P, P) \geqslant 0$.
   • De plus, $x \mapsto P^2(x)\sin x$ étant positive et continue sur $[0, \pi]$, par stricte positivité de l'intégrale, $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in [0, \pi]$, $P^2(x)\sin x = 0$. Comme sin ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, on en déduit que
   $$\forall x \in]0, \pi[, \quad P(x) = 0.$$

Ainsi, P est un polynôme ayant une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ainsi, $\varphi(P,P)=0$ si et seulement si $P=0$.

Par conséquent, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. $\boxed{\text{C'est donc un produit scalaire.}}$

2. Pour tout $(i,j)\in [\![0,2]\!]$, $\left\langle X^i,X^j\right\rangle = \displaystyle\int_0^\pi x^{i+j}\sin x \,\mathrm{d}x$. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^\pi x^n\sin x.$$

On a alors

$$\mathrm{Mat}_{bc}(\varphi)=\begin{pmatrix} I_0 & I_1 & I_2\\ I_1 & I_2 & I_3\\ I_2 & I_3 & I_4\end{pmatrix}.$$

Il faut donc déterminer I_n, pour $n\in[\![0,4]\!]$:

- $I_0=\displaystyle\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t=\big[-cost\big]_0^\pi=2.$
- À l'aide d'une intégration par parties, $t\mapsto t$ et $t\mapsto -\cos t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$:

$$I_1=\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t=\Big[-t\cos t\Big]_0^\pi+\int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t=\pi.$$

- À l'aide de deux intégrations par parties, $t\mapsto t^2$ et $t\mapsto -\sin t$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$:

$$I_2=\int_0^\pi t^2\sin t\,\mathrm{d}t=\big[-t^2\cos t\big]_0^\pi+\int_0^\pi 2t\cos t\,\mathrm{d}t=\pi^2+\Big[2t\sin t\Big]_0^\pi-2\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t=\pi^2-2I_0.$$

  Ainsi $I_2=\pi^2-4$.
- À l'aide de deux intégrations par parties, $t\mapsto t^3$ et $t\mapsto -\sin t$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$:

$$I_3=\int_0^\pi t^3\sin t\,\mathrm{d}t=\big[-t^3\cos t\big]_0^\pi+\int_0^\pi 3t^2\cos t\,\mathrm{d}t=\pi^3+\Big[3t^2\sin t\Big]_0^\pi-6\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t=\pi^3-6I_1.$$

  Ainsi $I_3=\pi^3-6\pi$.
- À l'aide de deux intégrations par parties, $t\mapsto t^4$ et $t\mapsto -\sin t$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$:

$$I_4=\int_0^\pi t^4\sin t\,\mathrm{d}t=\big[-t^4\cos t\big]_0^\pi+\int_0^\pi 4t^3\cos t\,\mathrm{d}t=\pi^4+\Big[4t^3\sin t\Big]_0^\pi-12\int_0^\pi t^2\sin t\,\mathrm{d}t=\pi^4-12I_2.$$

  Ainsi $I_4=\pi^4-12\pi^2+48$.

On obtient donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{bc}(\varphi)=\begin{pmatrix} 2 & \pi & \pi^2-4\\ \pi & \pi^2-4 & \pi^3-6\pi\\ \pi^2-4 & \pi^3-6\pi & \pi^4-12\pi^2+48.\end{pmatrix}}.$$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de ce produit scalaire que l'on notera indifféremment φ ou $\langle .,.\rangle$. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On orthonormalise la base $(1,X)$ de $\mathrm{Vect}(1,X)$. On note (f_1,f_2) la base orthonormale obtenue.
   - On a $\|1\|^2=\langle 1,1\rangle=I_0=2$, donc $\boxed{f_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.
   - Soit $u_2=X-\dfrac{1}{2}\langle X,1\rangle 1=X-I_1=X-\dfrac{\pi}{2}$. On a alors

$$\|u_2\|^2=\langle X,X\rangle-2\cdot\frac{\pi}{2}\langle X,1\rangle+\frac{\pi^2}{4}\langle 1,1\rangle=\pi^2-4-\pi^2+\frac{\pi^2}{2}=\frac{1}{2}(\pi^2-8).$$

   Ainsi, $f_2=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^2-8}}(X-\dfrac{\pi}{2})$

4. On calcule $p(1)$, $p(X)$ et $p(X^2)$.
   - $p(1)=1$, car $1\in\mathrm{Vect}(1,X)$;
   - $p(X)=X$, car $X\in\mathrm{Vect}(1,X)$;

- $p(X^2) = \frac{1}{2}\left\langle X^2, 1\right\rangle 1 + \frac{2}{\pi^2-8}\left\langle X^2, X-\frac{\pi}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}(\pi^2-4) + \frac{2}{\pi^2-8}\left(\pi^3 - 6\pi - \frac{\pi}{2}(\pi^2-4)\right)\left(X - \frac{\pi}{2}\right).$
  Ainsi,
$$p(X^2) = \frac{1}{2}(\pi^2-4) + \frac{2}{\pi^2-8}\left(\frac{\pi^3}{2} - 4\pi\right)\left(X-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\left(X - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}(\pi^2-4) = \pi X - 2.$$
  Par conséquent,
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

5. Il suffit pour cela de procéder à l'orthonormalisation de $(1, X, X^2)$, les deux premiers vecteurs de cette orthonormalisation étant alors (f_1, f_2), d'après les calculs précédents. L'étape suivante de l'orthonormalisation consiste à déterminer un vecteur u_3 orthogonal à $\mathrm{Vect}(1, X)$, puis à le diviser par sa norme. Cette dernière normalisation est inutile ici, puisqu'on ne demande qu'une base orthogonale et non orthonormale. On se contente donc de calculer u_3, en constatant que l'essentiel des calculs a été effectué dans le question précédente, puisque
$$\boxed{u_3 = X^2 - p(X^2) = X^2 - \pi X + 2}.$$
   Ainsi, (f_1, f_2, u_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
   La matrice P recherchée n'est pas unique. J'en donne une, à mon avis la plus simple. La famille $\mathcal{B} = (1, X, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (car échelonnée en degré), et, comme on l'a déjà vu, $p(1) = 1$, $p(X) = X$, et puisque (f_1, f_2, u_3) est une base orthogonale, $u_3 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2)^{\perp} = \mathrm{Vect}(1, X)^{\perp}$, donc $p(u_3) = 0$.
   Ainsi, la matrice de p dans la base $(1, X, u_3)$ est
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Soit alors P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$
   D'après la formule de changement de base, on a bien :
$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . \end{pmatrix}}$$

Correction de l'exercice 8 –

1. bon de F_1 : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. bon de F_2 : $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$; $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
3. bon de F_3 : $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $F^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}X_0$, $F : x - y + z = 0$. On exprime $p_F(X)$ sous la forme $p_F(X) = X - \lambda X_0$, on remplace dans l'équation de l'hyperplan, pour déterminer λ. On spécialise pour $X = e_1, e_2, e_3$.
   Résultat : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Même méthode. $F^{\perp} = \text{Vect}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $F : 2y+z-2t=0$; $M = \begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&5&-2&4\\0&-2&8&2\\0&4&2&5\end{pmatrix}$

6. bon de F_6 : $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

   Résultat : $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6&3&0&3\\3&2-21&&\\0&-2&8&2\\3&1&2&2\end{pmatrix}$

7. Même méthode que F_4 et F_5. $M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6&2&2&-4\\2&9&-1&2\\2&-1&9&2\\-4&2&2&6\end{pmatrix}$

8. Les éléments de F_8 sont les éléments$X$ de $\mathbb{R}^5$ tels que $X \perp \begin{pmatrix}1&-2&0&-1&-1\end{pmatrix}$ et $X \perp \begin{pmatrix}2&0&0&-1&1\end{pmatrix}$. Ainsi, $F^{\perp}$ est le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs orthogonaux à X.

   On va en fait déterminer dans un premier temps la matrice de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$, en orthonormalisant cette base de $F^{\perp}$. On retrouve ensuite p_F en remarquant que $p_F + p_{F^{\perp}} = \text{id}$.

   Soit (f_1, f_2) l'orthonormalisée de Schmidt de $\left(\begin{pmatrix}1&-2&0&-1&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0&0&-1&1\end{pmatrix}\right)$.

   On a
$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-1&-1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{1}{3\sqrt{29}}\begin{pmatrix}12&4&0&-5&9\end{pmatrix}$$

   La matrice de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$ est alors :
$$\frac{1}{1827}\begin{pmatrix}1269&-186&0&-681&495\\-186&1156&0&382&774\\0&0&0&0&0\\-681&382&0&436&-54\\495&774&0&-54&990\end{pmatrix}$$

   La matrice de la projection sur F est donc :
$$\frac{1}{1827}\begin{pmatrix}558&186&0&681&-495\\186&671&0&-382&-774\\0&0&1827&0&0\\681&-382&0&1341&54\\-495&-774&0&54&837\end{pmatrix}$$

9. bon de F_9 : $(\sqrt{3}(X-1))$.
   - $p(1) = 3\langle 1, X-1\rangle (X-1) = 3\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x(X-1) = -\frac{3}{2}(X-1)$
   - $p(X) = 3\langle X, X-1\rangle (X-1) = 3\int_0^1 (x^2-x)\,\mathrm{d}x(X-1) = -\frac{1}{2}(X-1)$
   - $p(X^2) = 3\left\langle X^2, X-1\right\rangle (X-1) = 3\int_0^1 (x^3-x^2)\,\mathrm{d}x(X-1) = -\frac{1}{4}(X-1)$.

   Ainsi, $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}6&2&1\\-6&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

   Contrairement aux exemples dans $\mathbb{R}^n$, la matrice obtenue n'est pas symétrique. Cela vient du fait que la base canonique n'est pas orthonormale (cette propriété de symétrie n'est vraie que dans une base orthonormale, comme on le verra plus tard).

10. b.o.n. de F_{10} : $f_1 = \sqrt{3}\cdot X$, $f_2 = \sqrt{5}\cdot(4X^2-3X)$.

Par la formule du projeté orthogonal, on obtient $p(1) = 4X - \frac{10}{3}X^2$. Comme $X \in \mathrm{Vect}(X, X^2)$, ainsi que X^2, on a $p(X) = X$ et $p(X^2) = X^2$. Ainsi la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -\frac{10}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$