Analyse 1 – Révisions : suites

Correction de l'exercice 1 – Éléments de réponse (à développer)

- On note $f : x \mapsto \sqrt{2}x + 3$. La fonction f admet un seul point fixe 3. Les intervalles $[0, 3]$ et $[3, +\infty[$ sont stables par f (remarquez que les intervalles stables sont souvent délimités par les points fixes ; pensez-y pour déterminer des intervalles stables). Donc :
 - si $u_0 \in [0, 3]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 3]$.
 - si $u_0 \in [3, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3, +\infty[$.
 - si $u_0 \in [-\frac{3}{2}, 0[$, $u_1 \in [0, 3]$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [3, +\infty[$.
 Soit $g : x \mapsto f(x) - x$, sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que g est positive sur $[0, 3]$ et négative sur $[3, +\infty[$. En déduire que :
 - si $u_0 \in [-\frac{3}{2}, 3]$, (u_n) croît, et est majorée par 3, donc converge. La seule limite possible est le point fixe 3.
 - si $u_0 \in [3, +\infty[$, (u_n) décroît, et est minorée par 3, donc converge. La seule limite possible est le point fixe 3.
- f est décroissante sur $]0, +\infty[$. Un argument classique permet de montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Elles vérifient toutes deux la relation donnée par la fonction $g : x \mapsto \frac{x^4}{2}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Une étude directe du signe de $u_{n+2} - u_n$ montre que si $u_n < \sqrt[3]{2}$, alors $u_{n+2} < u_n < \sqrt[3]{2}$, et si $u_n > \sqrt[3]{2}$, alors $u_{n+2} > u_n > \sqrt[3]{2}$. De plus, si $u_n < \sqrt[3]{2}$, alors $u_{n+1} > \sqrt[3]{2}$, et réciproquement. Un argument de récurrence montre alors que :
 - si $u_0 \in]0, \sqrt[3]{2}[$, alors :
 - (u_{2n}) est décroissante, à valeurs dans $]0, \sqrt[3]{2}[$, donc convergente. Le seul point fixe de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\sqrt[3]{2}$, et par décroissance, cela ne peut pas être la limite de (u_{2n}) . Donc (u_{2n}) converge vers un bord du domaine, nécessairement 0 ici ;
 - (u_{2n+1}) est croissante, à valeurs dans $] \sqrt[3]{2}, +\infty[$, donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. De même, la seule limite possible est ici $+\infty$.
 - si $u_0 \in] \sqrt[3]{2}, +\infty[$, de même en inversant le rôle de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
 - si $u_0 = \sqrt[3]{2}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, de valeur et donc de limite $\sqrt[3]{2}$. Ainsi, ce cas est le seul pour lequel la suite (u_n) converge.
- Soit $f : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Un calcul rapide montre que f n'admet pas de point fixe. Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, c'est vers un point du bord du domaine, donc $-\infty$, 1 ou $+\infty$. En raisonnant par l'absurde, on arrive facilement à une contradiction dans chacun des trois cas (passer à la limite dans la relation de récurrence, et obtenir une limite différente pour (u_{n+1}) que pour (u_n)).
- Étude très intéressante (à faire !)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}(4 - x^2)$, et $g : x \mapsto f(x) - x$, définis sur $\mathbb{R}$.

On se rend rapidement compte que les points fixes de f sont -4 et 1 , que g est positive entre ces points fixes et négative à l'extérieur. De plus :

- $] -\infty, -4[$ est un intervalle stable par f , donc si $u_0 \in] -\infty, -4[$, c'est vrai pour tout n , et l'étude du signe de g montre qu'alors (u_n) est décroissante. Elle tend alors nécessairement vers $-\infty$.
- $]0, \frac{4}{3}[$ est un intervalle stable ; de plus, f est décroissante sur cet intervalle. Donc, si $u_0 \in]0, \frac{4}{3}[$, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposé, et bornées (car contenues dans un intervalle borné). Elles sont donc convergentes. Elles convergent vers un point fixe de $f \circ f$. On montre rapidement qu'un point fixe de $f \circ f$ vérifie

$$x^4 - 8x^2 + 27x - 20 = 0.$$

Pour résoudre cette équation, souvenez-vous que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (la réciproque en revanche est fautive). Ainsi, on peut factoriser cette équation en :

$$(x - 1)(x + 4)(x^2 - 3x + 5) = 0,$$

et les seuls points fixes de $f \circ f$ sont 1 et -4 . Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une limite commune l , donc (u_n) converge vers l .

- Si $u_0 \in] -4, 0[$, alors d'après le signe de g , $u_1 > u_0$, et, la suite va être croissante tant qu'elle ne dépasse pas la valeur 0. Elle finit par dépasser cette valeur, sinon, elle devrait converger vers un point de $] -4, 0[$, intervalle qui ne contient pas de point fixe de f . Ainsi, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > 0$, et aussi $u_0 \leq \frac{4}{3}$ (puisque $\frac{4}{3}$ est le maximum de f). On se retrouve donc dans la situation précédente, et (u_n) converge vers 1 .
- Pour terminer, $f^{-1}(-4) = 4$, $f(\frac{4}{3}) = \frac{20}{27} < \frac{4}{3}$, donc

- * si $u_0 \in]\frac{4}{3}, 4[$, on a $u_1 \in]-4, \frac{4}{3}[$, et d'après ce qui précède, (u_n) tend vers 1.
- * si $u_0 \in]4, +\infty[$, $u_1 \in]-\infty, -4[$, et (u_n) tend vers $-\infty$.

Bilan

- si $u_0 \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$, (u_n) tend vers $-\infty$;
 - si $u_0 \in]-4, 4[$, (u_n) tend vers 1 ;
 - si $u_0 \in \{-4, 4\}$, (u_n) est stationnaire de valeur -4 , donc tend vers -4 .
5. Soit $f : x \mapsto \frac{4x+2}{x+5}$ et $g : f(x) - x$, définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Les points fixes de f sont -2 et 1 , g est positive sur $] -\infty, -5[\cup]-2, 1[$ et négative ailleurs. On obtient les variations de f :

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+		+		+	
$f(x)$	-4	$+\infty$	$-\infty$	-2	1	4

Ainsi :

- $[-2, 1]$ est un intervalle stable, et g y est positive, donc si $u_0 \in]-2, 1[$, alors (u_n) tend vers 1.
 - $[1, +\infty[$ est un intervalle stable et g y est négative, donc si $u_0 \in [1, +\infty[$, (u_n) décroît et tend vers 1.
 - si $u_0 \in]-\infty, -5[$, $u_1 \in [1, +\infty[$, et on se retrouve dans la situation précédente, (u_n) tend vers 1.
 - si $u_0 \in]-5, -2[$, tant qu'on ne sort pas de cet intervalle, (u_n) décroît (signe de g). On finit nécessairement par sortir de cet intervalle, sinon, (u_n) converge, nécessairement vers -5 (bord du domaine), ce qui amène une contradiction en passant à la limite dans la relation de récurrence. Puisque (u_n) commence par décroître, on sort de l'intervalle $] -5, -2[$, par en-dessous. Deux cas peuvent se produire :
 - * il existe n tel que $u_n = -5$. Dans ce cas, les termes suivants ne sont pas définis. la suite n'est pas définie (une infinité de points à enlever, qui sont les points d'une suite définies par une récurrence qu'on peut expliciter)
 - * sinon, il existe n tel que $u_n < -5$, et on est ramené au point précédent : (u_n) tend vers 1.
- Bilan : (u_n) tend vers 1, sauf pour une infinité (dénombrable) de points de $] -5, -2[$ pour lesquelles elle n'est pas définie, et sauf pour $u_0 = -2$ (dans ce cas elle est constante de valeur -2).
6. On a, dans tous les cas, $u_1 \in [-1, 1]$, puis $u_2 \in [0, 1]$. Or, $[0, 1]$ est un intervalle stable, $\cos$ y est décroissante. On en déduit qu'au moins à partir du rang 2, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés. De plus, d'après l'IAF, pour tout $n \geq 3$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \sin 1 |u_n - u_{n-1}|,$$

d'où, par comparaison avec une suite géométrique de raison $\sin 1 < 1$, $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Ainsi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune ℓ . C'est alors aussi la limite de (u_n) . Le réel ℓ est solution de l'équation $\cos \ell = \ell$, qu'on ne peut pas résoudre explicitement.

Correction de l'exercice 2 -

1. Tout d'abord, $u_1 = f(u_0) = f(1) = \sqrt{2}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n est bien défini et vérifie les égalités requises.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_{2n} et u_{2n+1} sont définis, et $\begin{cases} u_{2n} > 0 \\ u_{2n+1} > 1 \end{cases}$.

On a : $u_0 = 1 > 0$ et $u_1 = \sqrt{2} > 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors $u_{2n+1} \in D_g =]1, +\infty[$, donc u_{2n+2} est bien défini, et :

$$u_{2n+2} = g(u_{2n+1}) = \frac{1}{u_{2n+1} - 1} > 0,$$

l'inégalité provenant du fait que $u_{2n+1} > 1$. Ainsi, $u_{2n+2} \in D_f = [0, +\infty[$, donc u_{2n+3} est bien définie, et

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = \sqrt{1 + u_{2n+2}} > 1,$$

puisque $u_{2n+2} > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. Tout d'abord, $g \circ f(x)$ est bien défini pour tout $x \in]0, +\infty[$ (première chose à faire de manière générale : s'assurer que les objets dont on parle sont bien définis). En effet, pour tout $x > 0$, $f(x) > 1$, donc $f(x) \in D_g$. Ainsi, $D_{g \circ f} =]0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x + 1$ est croissante sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f étant la composée de ces deux fonctions croissantes, f est croissante.

N'oubliez pas de bien préciser que la première fonction qu'on applique prend ses valeurs dans le domaine sur lequel on étudie la monotonie de la seconde fonction.

Vous pouvez aussi bien sûr étudier les variations de f en dérivant f . N'oubliez pas dans ce cas de préciser la dérivabilité avant de dériver.

La fonction $x \mapsto x - 1$ est croissante sur $]1, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, g étant la composée de ces deux fonctions, l'une croissante, l'autre décroissante, g est décroissante.

Ainsi, $g \circ f$ est la composée d'une application croissante sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$, et d'une application décroissante sur $]1, +\infty[$. Elle est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $\Phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = g \circ f \circ g \circ f$. La fonction φ est la composée de deux fonctions décroissantes (on compose $g \circ f$ avec elle-même). Donc φ est croissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{4n+4} = g(u_{4n+3}) = g \circ f(u_{4n+2}) = g \circ f \circ g(u_{4n+1}) = g \circ f \circ g \circ f(u_{4n}) = \varphi(u_{4n}).$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{4n}$ est donc définie par la condition initiale $v_0 = u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \varphi(v_n)$, où φ est croissante.

Un résultat du cours nous dit qu'alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Vous n'êtes pas censés appliquer directement ce résultat, mais vous devez refaire sa démonstration dans ce cas précis. Allons-y !

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $u_{4n+4} \geq u_{4n}$.

Tout d'abord,

(a) $u_1 = \sqrt{2}$, donc :

(b) $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$, donc :

(c) $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} > \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc :

(d) $u_4 = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}) > \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 1$.

Ainsi, $u_4 > u_0 = 1$, d'où $\mathcal{Q}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$. Alors, φ étant croissante, elle préserve les inégalités (larges), donc :

$$\varphi(u_{4n}) \leq \varphi(u_{4n+4}), \quad \text{soit :} \quad u_{4n+4} \leq u_{4n+8}.$$

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. On sait déjà que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Montrons qu'elle est majorée. Une chose à bien retenir : dans le cas d'une suite définie par récurrence, si elle est croissante et majorée, elle est notamment majorée par sa limite, qui est un point fixe de la fonction définissant la récurrence (dans le cas où cette fonction est continue). Donc, pour deviner un majorant possible, il peut être utile de déterminer les points fixes de la fonction définissant la récurrence.

Déterminons donc les points fixes de φ . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\quad}, \quad \text{donc :} \quad g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1), \quad \text{donc :}$$

$$f \circ g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1}, \quad \text{donc :}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1}-1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1+1}}{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = x &\iff \frac{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1+1}}{\sqrt{1+x}+1} = 1 \\
&\iff \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1+1} = \sqrt{1+x}+1 \\
&\iff \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1} = \sqrt{1+x} \\
&\iff \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)+1 = 1+x \quad (\text{équivalent car tout est positif}) \\
&\iff \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1) = x \\
&\iff \sqrt{1+x} = x^2 - 1 \\
&\iff (x^2 - 1)^2 - (1+x) = 0 \\
&\iff ((x-1)^2(x+1) - 1)(x+1) = 0 \\
&\iff ((x-1)(x^2-1) - 1)(x+1) = 0 \\
&\iff (x^3 - x^2 - x)(x+1) = 0 \\
&\iff x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(x) = x$ si et seulement si $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La limite ℓ de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$, si elle existe, est forcément une de ces quatre valeurs. En effet, φ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, en passant à la limite dans la relation $u_{4n+4} = \varphi(u_{4n})$, on obtient $\ell = \varphi(\ell)$.

De plus, puisque $u_4 > 1$ et que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{4n} \geq u_4$, et par passage à la limite (toujours sous réserve d'existence), $\ell \geq u_4 > 1$. Donc, si la limite existe, elle vérifie $\ell > 1$. Ainsi, la seule valeur possible de ℓ est : $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Soit $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que x_0 est un majorant de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} \leq x_0$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{R}(n)$: $u_{4n} \leq x_0$.

On a $u_0 = 1 < x_0$, d'où $\mathcal{R}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(n)$. Alors, φ étant croissante, $\varphi(u_{4n}) \leq \varphi(x_0)$, c'est-à-dire, puisque x_0 est un point fixe de φ : $u_{4n+4} \leq x_0$, d'où $\mathcal{R}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{R}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{R}(n)$ entraîne $\mathcal{R}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Pensez à bien exploiter le fait que x_0 est point fixe de φ .

Conclusion : $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle converge donc dans $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, sa limite est donc :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. Déterminons les points fixes de f (dans $\mathbb{R}_+$, ce qui permet d'élever au carré sans problème) : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff 1+x = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Or, ℓ a été défini comme une racine de ce polynôme, donc ℓ est un point fixe de f .

De même, déterminons les points fixes de g ($x > 1$, donc toutes les implications sont des équivalences, notamment la deuxième) : pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$g(x) = x \iff \frac{1}{x-1} = x \iff 1 = x^2 - x \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

Encore une fois, ℓ étant racine de ce polynôme, ℓ est point fixe de g .

6. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+1} = f(u_{4n})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(f(u_{4n}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $f(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n+1} = \ell$.

La croissance de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} \leq u_{4n+4}$, donc, en appliquant la fonction f croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_{4n+1} \leq u_{4n+5}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} = g \circ f(u_{4n})$. Comme $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(g \circ f(u_{4n}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $g \circ f(\ell) = g(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n+2} = \ell$.
La croissance de $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+1} \leq u_{4n+5}$, donc, en appliquant la fonction g décroissante sur $]1, +\infty[$, $u_{4n+2} \geq u_{4n+6}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+3} = f \circ g \circ f(u_{4n})$. Comme $f \circ g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(f \circ g \circ f(u_{4n}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $f \circ g \circ f(\ell) = f \circ g(\ell) = f(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n+3} = \ell$.
La décroissance de $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} \geq u_{4n+6}$, donc, en appliquant la fonction f croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_{4n+3} \geq u_{4n+7}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

7. Soit $\varepsilon > 0$.

- Puisque $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell : \exists N_0, \forall n \geq N_0, |u_{4n} - \ell| < \varepsilon$.
- Puisque $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell : \exists N_1, \forall n \geq N_1, |u_{4n+1} - \ell| < \varepsilon$.
- Puisque $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell : \exists N_2, \forall n \geq N_2, |u_{4n+2} - \ell| < \varepsilon$.
- Puisque $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell : \exists N_3, \forall n \geq N_3, |u_{4n+3} - \ell| < \varepsilon$.

Soit $N = \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$. On en déduit donc que :

$$\forall n \geq N, \begin{cases} |u_{4n} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+1} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+2} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+3} - \ell| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \forall m \geq 4N, |u_m - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, le critère de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ est bien vérifié.

Cette démonstration est à retenir. Sachez la faire.

Correction de l'exercice 4 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations de P_n . P_n est dérivable, en tant que polynôme, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k.$$

Pour tout $x \geq 0$, il s'agit d'une somme de termes positifs, le premier au moins étant strictement positif (égal à 1) donc P'_n est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $P(0) = -1$ et $P_n(1) = -1 + \sum_{k=1}^n 1 = n - 1 \geq 0$.

Ainsi, P_n étant continue sur $[0, 1]$ puisqu'il s'agit d'un polynôme, et étant strictement croissante sur cet intervalle, il existe dans l'intervalle $[0, 1]$ un unique réel x_n tel que $P_n(x_n) = 0$, d'après le théorème de la bijection (en effet f est une bijection de $[0, 1]$ sur $P_n([0, 1]) = [P_n(0), P_n(1)] = [-1, n - 1]$, et $0 \in P_n([0, 1])$).

Or, $P_n(0) \neq 0$, donc $x_n \neq 0$. Par conséquent, $x_n \in]0, 1]$.

Enfin, P_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x > 1$, on a $P_n(x) > P_n(1) \geq 0$, donc $P_n(x) \neq 0$. Ainsi, x_n est bien l'unique solution de $P_n(x) = 0$ sur tout $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_{n+1}(x_n) = -1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_n^k = P_n(x_n) + x_n^{n+1} = x_n^{n+1},$$

puisque par définition, $P_n(x_n) = 0$. Ainsi, $P_{n+1}(x_n) > 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$.

Or, P_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'inégalité obtenue amène $x_n > x_{n+1}$. Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. De plus, elle est minorée par 0. Donc elle converge, d'après le théorème de convergence des suites monotones. Notons ℓ sa limite.

3. On a $x_1 = 1$, et $x_2 < x_1$, donc $x_2 \in]0, 1[$. De plus, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 < u_n < u_2, \quad \text{donc :} \quad 0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1}.$$

Or, $(u_2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $u_2 \in]0, 1[$, donc de limite nulle. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la limite de $(u_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ existe, et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{n+1} = 0.$$

Or, pour tout $x \neq 1$,

$$P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k = -2 + \sum_{k=0}^n x^k = -2 + \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En particulier, soit $n \geq 2$. Pour $x = x_n \neq 1$, on obtient :

$$0 = P_n(x_n) = -2 + \frac{1 - x_n^{n+1}}{1 - x_n}. \quad \text{donc:} \quad 2(1 - x_n) = 1 - x_n^{n+1}.$$

En passant à la limite dans cette égalité, on trouve :

$$2(1 - \ell) = 1 - 0 \quad \text{soit:} \quad \ell = \frac{1}{2}.$$

4. On a $\frac{x_n}{\ell} = 2x_n$, donc, d'après l'égalité trouvée dans la question précédente,

$$\frac{x_n}{\ell} = 1 + x_n^{n+1}.$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{x_n}{\ell}\right) = \ln(1 + x_n^{n+1}) \underset{+\infty}{\sim} x_n^{n+1},$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{n+1} = 0$. Ainsi :

$$\ln\left(\left(\frac{x_n}{\ell}\right)^n\right) \underset{+\infty}{\sim} nx_n^{n+1}.$$

Or, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq nx_n^{n+1} \leq nx_2^{n+1} = e^{\ln n + (n+1)\ln(x_2)}.$$

D'après les croissances comparées, $\ln n = o(n+1)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n + (n+1)\ln(x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)\ln(x_2) = -\infty, \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^{n+1} = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\left(\frac{x_n}{\ell}\right)^n\right) = 0$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{\ell}\right)^n = 1$, donc que $x_n^n \underset{+\infty}{\sim} \ell^n$. Or :

$$x_n - \ell = \frac{1}{2}(2x_n - 1) = \frac{1}{2}x_n^{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}x_n \ell^n = \frac{1}{2}\ell^{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Correction de l'exercice 5 -

0. Soit (u_n) une suite convergeant vers $a > 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $a - \varepsilon \leq u_n \leq a + \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, on trouve l'existence de N tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{a}{2} \leq u_n \leq \frac{3a}{2}$. La première des deux inégalités donne le résultat escompté.
1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2x$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$-\infty$

2. (a) $]0, 1[$ est un intervalle stable par f . En effet, $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, et f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc $f(]0, \frac{1}{2}[) \subset]0, \frac{1}{4}[\subset]0, 1[$. De même, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ et $f(1) = 0$, et f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, donc $f(]0, 1[) \subset]0, \frac{1}{4}[\subset]0, 1[$. Par conséquent, $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$.

Ainsi, puisque $u_0 \in]0, 1[$, on en déduit, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout n , $u_n \in]0, 1[$. Comme on est en début de copie, on rédige cette récurrence, même si elle est immédiate.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in]0, 1[$.

Puisque $u_0 \in]0, 1[$ par hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors $u_n \in]0, 1[$, et comme $]0, 1[$ est stable par f , $u_{n+1} = f(u_n)$ est encore dans $]0, 1[$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Remarquons que par hypothèse, $u_0 < 1 = \frac{1}{0+1}$. Montrons plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \frac{1}{n+1}$ (vous comprendrez plus loin pourquoi j'ai exclu 0 de la récurrence).

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $u_n < \frac{1}{n+1}$.

D'après le tableau de variations de f , $u_1 \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{1+1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vérifié. Alors, puisque $n \geq 1$ (raison pour laquelle on a traité le cas 0 à part),

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2},$$

et, puisque f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$,

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2},$$

d'où $\mathcal{Q}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$. Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après le théorème d'encadrement.

(b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = nu_n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n = (n+1)u_n(1 - u_n) - nu_n = u_n(1 - (n+1)u_n).$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_n < 1$, donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) croissante. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < \frac{n}{n+1} < 1.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 1. Elle converge vers un réel L . Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$, le théorème de prolongement des inégalités amène : $0 \leq L \leq 1$. De plus, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et strictement positive, $L \neq 0$. Donc $L \in]0, 1[$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On exprime w_n en fonction de u_n :

$$w_n = n(v_{n+1} - v_n) = n(n+1)u_{n+1} - n^2u_n = n(n+1)(u_n - u_n^2) - n^2u_n = nu_n - n(n+1)u_n^2 = v_n - \frac{n+1}{n}v_n^2.$$

Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers L , $(v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers L^2 . De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Ainsi, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et sa limite est $L - L^2 = L(1 - L)$, d'après les règles arithmétiques usuelles sur les limites.

3. Si $L \neq 1$, alors $L(1-L) > 0$, donc, d'après le préliminaire, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $w_n \geq \frac{1}{2}L(1-L)$, donc $v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{2n}L(1-L)$. Alors,

$$\forall n \geq n_0, v_n - v_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \geq \frac{1}{2}L(1-L) \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$, on en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

4. On a montré dans la question (3b) que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L \in]0, 1[$. Par conséquent, elle ne peut converger vers $+\infty$: la question précédente aboutit à une contradiction, donc l'hypothèse $L \neq 1$ est erronée. Par conséquent $L = 1$, c'est-à-dire que la limite de $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 1. On en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 6 – – Algorithme de Héron

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right)$. En étudiant ses variations, on obtient rapidement :

- $f(]0, +\infty[) = [\sqrt{a}, +\infty[$, donc $u_1 = f(u_0) \geq \sqrt{a}$.
- l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable, donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$, puisque $u_1 \in [\sqrt{a}, +\infty[$.

La fonction f étant croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, u_n est monotone à partir du rang 1 (je ne refais pas la démonstration, mais vous êtes censés le faire), et son sens de variation est donné par ses variations en petits rangs (entre u_1 et u_2). Or $u_1 \geq \sqrt{a}$, donc $u_1 + \frac{a}{u_1} \leq u_1\sqrt{a} \leq 2u_1$. Ainsi $u_2 \leq u_1$. La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0 : elle converge vers un réel ℓ . Puisque f est continue sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$, c'est-à-dire $\ell^2 = a$. Comme $u_n \geq 0$, ℓ ne peut pas être strictement négative, donc $\ell = \sqrt{a}$.

2. Puisque $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$, on peut se dispenser des valeurs absolues. Alors :

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 = \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(2u_nu_{n+1} - 2\sqrt{a}u_n) = \frac{u_n}{\sqrt{a}}(u_{n+1} - \sqrt{a}) \geq (u_{n+1} - \sqrt{a}).$$

La dernière inégalité résulte du fait que $u_n \geq \sqrt{a}$, car $n \geq 1$.

3. Par une récurrence immédiate, on trouve alors $|u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{(u_1 - \sqrt{a})^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}}$.
4. Si on suppose que $u_0 \geq \sqrt{a}$, on obtient $|u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{(u_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.
5. Il faut trouver le plus petit entier n tel que : $\frac{|2 - \sqrt{2}|^{2^n}}{(2\sqrt{2})^{2^n-1}} \leq 10^{-100}$,

c'est-à-dire tel que : $2^n \ln(2 - \sqrt{2}) - (2^n - 1) \ln(2\sqrt{2}) \leq -100 \ln 10$,

c'est-à-dire tel que : $2^n \geq \frac{100 \ln 10 + \ln(2\sqrt{2})}{\ln(2\sqrt{2}) - \ln(2 - \sqrt{2})} = 146,9007\dots$

Ainsi, u_8 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. En utilisant maintenant $u_1 = \frac{2}{3}$, cela ne nous épargne pas de calcul : on trouve de même qu'on doit aller jusqu'au rang 8. Cela signifie que la première majoration ne nous a pas fait perdre beaucoup d'informations.

Correction de l'exercice 9 –

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{u_n-1}$.

1. Étude de l'existence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) • f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 • L'équation $f(x) = 2$ équivaut à $2x + 4 = 2x - 2$, donc $4 = -2$, ce qui n'est pas possible. Donc 2 n'est pas dans l'image de f .
 • Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. L'équation $f(x) = y$ équivaut à $2x + 4 = xy - y$, donc à $x(y - 2) = y + 4$, donc, puisque $y \neq 2$, à $x = \frac{y+4}{y-2}$.
 Ainsi, y a un et un seul antécédent par f .

On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et que sa réciproque est donnée, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, par :

$$g(y) = f^{-1}(y) = \frac{y+4}{y-2}.$$

- (b) La fonction f étant définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, le seul cas de figure dans lequel (u_n) n'est pas défini est celui où, lors de la construction de (u_n) , une valeur donnée prend la valeur 1, empêchant ainsi de continuer à appliquer f .

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définie si et seulement s'il existe n tel que $u_n = 1$, c'est-à-dire $f \circ \dots \circ f(u_0) = 1$, c'est-à-dire $f \circ \dots \circ f(a) = 1$, le nombre de termes dans cette composition étant n .

Cette condition équivaut à $a = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}(1) = v_n$, par définition de (v_n) .

Ainsi, (u_n) n'est pas bien définie si et seulement s'il existe n tel que $v_n = a$. On obtient le résultat en contraposant.

- (c) La fonction g étant un quotient de deux fonctions polynomiales, elle est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, g'(x) = \frac{(y-2) - (y-4)}{(y-2)^2} = -\frac{6}{(y-2)^2} < 0$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
$g(x)$	1 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘ 1

D'après ces variations, $g(] - \infty, 2[) =] - \infty, 1[$ et $g(] 2, +\infty[) =] 1, +\infty[$, donc l'intervalle $] - \infty, 2[$ est stable par g .

Cela prouve au passage que (v_n) est bien définie, puisque $v_0 = 1 \in] - \infty, 2[$, et tous ses termes sont dans $] - \infty, 2[$.

Par ailleurs, la décroissance de g va nous permettre d'étudier la monotonie des deux suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) . En effet ces suites extraites sont définies par une relation de récurrence donnée par la fonction $g \circ g$, qui, d'après les règles de composition des variations, est croissante.

On calcule les premiers termes dont on aura besoin : $v_0 = 1, v_1 = -5, v_2 = \frac{1}{7}$.

On a alors $v_0 > v_2$. Par croissance de $g \circ g$ sur $] -\infty, 2[$, on obtient $g \circ g(v_0) > g \circ g(v_2)$, donc $v_2 > v_4$. En itérant ce processus, l'inégalité de propagation à tous les rangs (on ne sort jamais de l'intervalle $] -\infty, 2[$, pas stabilité de cet intervalle), et (v_{2n}) est donc décroissante.

Par ailleurs $(v_{2n+1}) = (f(v_{2n}))$, donc, f étant décroissante, et (v_{2n}) aussi, on en déduit que (v_{2n+1}) est croissante.

(d) On a, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $g(y) \neq 2$,

$$g \circ g(y) = \frac{\frac{y+4}{y-2} + 4}{\frac{y+4}{y-2} - 2} = \frac{5y-4}{-y+8}.$$

Ainsi, y est un point fixe de $g \circ g$ si et seulement si $\frac{5y-4}{-y+8} = y$, c'est-à-dire $y^2 - 3y - 4 = 0$. Ainsi, les points fixes de $g \circ g$ sont -1 et 4 .

La suite (v_{2n+1}) est croissante, et majorée par 2 . Elle est donc convergente. Elle converge donc vers un point fixe de $g \circ g$ (car cette fonction est continue) ou un bord du domaine. Comme (v_{2n+1}) est à valeurs dans $] -\infty, 2[$, le seul point fixe possible est -1 , et le seul bord possible est 2^- , ce qui n'est pas possible, car sinon, $f(v_{2n+1}) \rightarrow -\infty$, puis $f \circ f(v_{2n+1}) \rightarrow 1$, donc $v_{2n+3} \rightarrow 1$, ce qui entre en contradiction avec $v_{2n+1} \rightarrow 2$.

Ainsi, $\lim v_{2n+1} = -1$.

En appliquant la fonction f continue en -1 ,

$$\lim f(v_{2n+1}) = f(-1) = -1, \quad \text{donc:} \quad \lim v_{2n+2} = -1.$$

Ainsi, $\lim v_{2n+1} = \lim v_{2n} = -1$, donc, par un argument classique, (v_n) admet une limite, égale à -1 .

2. **Convergence de (u_n)** On suppose dans toute cette question que $a \notin \{v_k, k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, la suite (u_n) est bien définie.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel x vérifie l'équation $f(x) = x$ si et seulement si $g \circ f(x) = g(x)$ (car g est bijective), donc si et seulement si $x = g(x)$. Ainsi, f et g ont les mêmes points fixes, donc les points fixes de g sont -1 et 4 .

De même, les points fixes de $f \circ f$ sont les points fixes de $g \circ g$, à savoir -1 et 4 également.

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, en tant que fraction rationnelle, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = -\frac{6}{(x-1)^2} < 0.$$

Ainsi, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	2		2
			$+\infty$
			$-\infty$

Ces variations indiquent que $f(]1, +\infty[) \subset]2, +\infty[\subset]1, +\infty[$, donc $]1, +\infty[$ est un intervalle stable par f .

(c) Supposons $a \in]1, +\infty[$. Par un argument similaire à celui utilisé lors de l'étude de (v_n) , la décroissance de f sur l'intervalle stable $]1, +\infty[$ amène la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , dès lors que $a \in]1, +\infty[$. On passe de l'une à l'autre en appliquant f décroissante, donc l'une est croissante et l'autre est décroissante. Celle qui décroît est minorée par 1 , donc elle converge. Puisque la relation de récurrence satisfaite par cette suite est donnée par la fonction $f \circ f$, qui est continue sur son domaine, la convergence se fait vers l'unique point fixe possible 4 , ou vers un bord, le seul possible étant ici 1 . Comme plus haut, cette dernière possibilité n'est pas possible (appliquer deux fois f et regarder la limite alors obtenue) donc cette suite tend vers 4 , donc la deuxième suite, obtenue en appliquant f (continue) à la première, tend vers $f(4) = 4$.

Par conséquent, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite 4 , donc (u_n) converge vers 4 .

(d) Supposons $a \in]-\infty, -5[$. On a $f(-5) = 1$, donc, f étant strictement décroissante sur $] -\infty, -5[$, $f(a) > 1$, donc $u_1 > 1$, et on est ramené à l'étude précédente. Ainsi, (u_n) admet une limite, égale à 4 .

- (e) Supposons $a \in]\frac{1}{7}, 1[$. De même, $f(\frac{1}{7}) = -5$, et f est strictement décroissante sur $] \frac{1}{7}, 1[$, donc $f(a) < -5$, donc $u_1 \in] -\infty, 5[$ et on est ramené à l'étude de la question précédente (on aura alors $u_2 \in]1, +\infty[$)
Par conséquent, dans ce cas aussi, (u_n) converge vers 4.
- (f) Supposons $a \in] -5, \frac{1}{7}[$, $a \neq -1$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in] -5, \frac{1}{7}[$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f \circ f(x) - x = \frac{8x+4}{x+5} - x = \frac{-x^2+3x+4}{x+5} = \frac{-(x+1)(x-4)}{x+5}.$$

Ainsi, $f \circ f(x) - x$ est négatif sur $] -5, -1[$ et positif sur $] -1, \frac{1}{7}[$.

- Si $a \in] -5, -1[$, montrons que sous les hypothèses données, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à valeurs dans $] -5, -1[$. Nous raisonnons par récurrence :
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $-1 > u_0 \geq u_2 \geq \dots \geq u_{2n} > -5$.
La propriété $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite par hypothèse initiale sur a
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors, la fonction $f \circ f - \text{id}$ étant négative sur $] -5, -1[$,

$$f \circ f(u_{2n}) - u_{2n} \leq 0 \quad \text{soit:} \quad u_{2n+2} \leq u_{2n}.$$

Puisque par hypothèse, la suite (u_n) prend ses valeurs dans $] -5, \frac{1}{7}[$, on a aussi $u_{2n+2} > -5$. Ainsi, on obtient :

$$-1 > u_0 \geq u_2 \geq \dots \geq u_{2n} \geq u_{2n+2} > -5,$$

ce qui correspond bien à la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, la suite (u_{2n}) est décroissante et à valeurs dans $] -5, -1[$.

En particulier, elle est décroissante et minorée, donc elle converge. Sa convergence se fait vers un point fixe de $f \circ f$, ou vers un bord de son domaine. Comme (u_{2n}) ne peut pas tendre vers -1 (à cause de ses variations), ni vers 4, sa seule limite possible est la valeur -5 (bord du domaine de $f \circ f$). Or,

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{8x+4}{x+5} = -\infty,$$

donc, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = -5^+$, on obtiendrait $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+2} = -\infty$, ce qui amène une contradiction.

- Si $a \in] -1, \frac{1}{7}[$, on montre de la même manière que (u_{2n}) est croissante, et à valeurs dans $] -1, \frac{1}{7}[$, donc convergente, vers -1 , 4 ou -5 , ce qui n'est pas possible du fait de ses variations.

Ainsi, l'hypothèse stipulant que (u_n) prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $] -5, \frac{1}{7}[$ amène une contradiction. On en déduit qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} \notin] -5, \frac{1}{7}[$. Comme on a supposé que a n'est pas égal à une valeur de v_n (donc en particulier, $a \neq 1, -5, \frac{1}{7}$), on est ramené, à partir du rang n_0 , à une des situations décrites dans les questions (c), (d) et (e). Par conséquent, (u_n) converge vers 4.

(g) Nous avons donc montré que

- pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ différent de -1 , (u_n) est bien défini et converge vers 4
- si $a = -1$, comme il s'agit d'un point fixe de f , (u_n) est constante égale à -1 , donc converge vers -1 .
- si $a \in \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors (u_n) n'est pas définie pour les grandes valeurs de n .

3. Étude de la vitesse de convergence de (u_n)

Dans cette question, on pourra admettre le résultat suivant (moyenne de Cesaro) : si une suite (a_n) admet une limite ℓ (finie ou infinie) alors la suite $\left(\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ .

- (a) L'énoncé n'est pas tout à fait exact. Il faut rajouter l'hypothèse $a > 1$ et $a \neq 4$. Avec l'hypothèse supplémentaire sur a , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et $u_n \neq 4$. Sous cette hypothèse, étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle fermé dont les bornes sont u_k et 4 est entièrement compris dans le domaine de définition de f . Comme f est dérivable sur son domaine de définition, on peut utiliser le théorème des accroissements finis entre 4 et u_k : il existe un réel $c_k \in] \min(4, u_k), \max(4, u_k)[$ tel que

$$f(u_k) - f(4) = f'(c_k)(u_k - 4) \quad \text{soit:} \quad u_k - 4 = f'(c_k)(u_k - 4) = f'(c_k)(f(u_{k-1}) - 4)$$

En itérant cette relation en cascade, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(u_n) - 4 = f'(c_n)f'(c_{n-1}) \dots f'(c_1)(f(u_0) - 4).$$

On obtient bien

$$f(u_n) - 4 = \prod_{k=1}^n f'(c_k)(f(u_0) - 4).$$

Comme (u_n) tend vers 4, il en est de même de $\min(4, u_n)$ et de $\max(4, u_n)$. Ainsi, comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \min(4, u_n) \leq c_n \leq \max(4, u_n),$$

le théorème d'encadrement amène la convergence de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 4$.

(b) On a $f'(4) = -\frac{2}{3}$, et f' est continue en $-\frac{2}{3}$. Donc $|f'(c_n)| \rightarrow \frac{2}{3}$, et par continuité du $\ln$, $\ln |f'(c_n)| \rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

Par conséquent, d'après le théorème de Cesaro admis dans l'énoncé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

(c) On a donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + o(1) \quad \text{donc:} \quad \sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = n \ln\left(\frac{2}{3}\right) + o(n).$$

Il existe donc une suite (x_n) , vérifiant $w_n = o(n)$, telle que

$$\sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = n \ln\left(\frac{2}{3}\right) + x_n,$$

et donc, en appliquant l'exponentielle :

$$\prod_{k=1}^n |f'(c_k)| = e^{n \ln\left(\frac{2}{3}\right) + x_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{x_n}.$$

On déduit alors de la question 3(a) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{x_n} (f(u_0) - 4).$$

Puisqu'on a supposé $a \neq 4$, $u_0 - 4 \neq 0$, et on peut donc poser $w_n = x_n + \ln(a - 4) = o(n)$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{w_n}.$$

(d) Si $r = 0$, le résultat est trivial car $r^n = 0$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{|u_n - 4|}{r^n} = e^{n(\ln \frac{2}{3} - \ln r) + w_n}.$$

- Si $r > \frac{2}{3}$, alors $\ln \frac{2}{3} - \ln r < 0$, et puisque $w_n = o(n)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln \frac{2}{3} - \ln r \right) + w_n = -\infty \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n - 4|}{r^n} = 0.$$

Ainsi, $|f(u_n) - 4| = o(r^n)$

- Si $r < \frac{2}{3}$, alors $\ln \frac{2}{3} - \ln r > 0$, et puisque $w_n = o(n)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln \frac{2}{3} - \ln r \right) + w_n = +\infty \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f(u_n) - 4|}{r^n} = +\infty.$$

Ainsi, $r^n = o(|f(u_n) - 4|)$.

(e) Une question supplémentaire pour régler le cas où on n'a plus l'hypothèse sur a .

- Si $a = 4$ ou $a = -1$, la question ne'st pas intéressante, car $(|f(u_n) - 4|)$ est constante.
- Si $a < 1$, $a \neq -1$, et a non égal à une des valeurs de v_n (afin que (u_n) soit bien définie), alors, d'après ce qui précède, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > 1$. En posant $z_n = u_{n_0+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on est ramené pour la suite (z_n) à la situation précédente :

* Si $r > \frac{2}{3}$,

$$|f(z_n) - 4| = o(r^n) \quad \text{donc:} \quad |f(u_n) - 4| = o(r^{n-n_0}) = \frac{1}{r^{n_0}} o(r^n) = o(r^n),$$

puisque $\frac{1}{r^{n_0}}$ est une constante.

* Si $r \in [0, \frac{2}{3}[$,

$$r^n = o(f(z_n) - 4) \quad \text{donc:} \quad r^{n-n_0} = o(f(u_n) - 4), \quad \text{donc:} \quad r^n = o(f(u_n) - 4),$$

puisque r^{n_0} est une constante.

4. Programmation

Les cas où il n'existe pas d'entier k tel que $u_k > 1$ sont, d'après ce qui précède, le cas où $a = -1$ (suite constante), et les valeurs de a pour lesquelles (u_n) est non définie, c'est-à-dire pour lesquelles, il existe une valeur k telle que $u_k = 1$ (la valeur suivante ne pouvant alors pas être calculée). On obtient alors

```
begin program suite;

var u:real; n:integer;

begin
  writeln('a?'); readln(u); {initialisation de la suite}
  if u=-1 then n:=-1
  else
    n:=0; {initialisation du compteur d'indice}
    begin
      while u < 1 do {on s'arrête si u_n=1 ou u_n>1}
        begin
          n:=n+1
          u:= (2*u+4)/(u-1); {calcul de la valeur suivante de u_n}
        end;
        {pourquoi s'est-on arrêté? (u_n=1 ou u_n>1?)}
      if u=1 then n:=-1 {si c'est car u_n=1, par convention il faut renvoyer -1}
    end;
    readln('Le rang recherché est',n);
  end.
```

Correction de l'exercice 12 – Étude d'une suite définie par récurrence

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence suivante :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout x et y réels, on a donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons l'inégalité précédente à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$. Ainsi :

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|.$$

Cette utilisation de l'IAF pour les suites définies par récurrence est archi-classique; il faut absolument retenir cette méthode.

2. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_1 - u_0|$.
Or, $\sum \frac{1}{2^n}|u_1 - u_0|$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente. On déduit alors du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge, donc que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument. La convergence de cette dernière série équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. On calcule le reste de la série précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} |u_1 - u_0| = \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - u_0| = \frac{1 - \frac{\pi}{8}}{2^{n-1}}.$$

Or, le seul point fixe de f est 0 (car f est concave sur $\mathbb{R}_+$, donc sous la tangente $y = \frac{x}{2}$, donc pour tout $x > 0$, $f(x) \leq \frac{x}{2} < x$, et de même sur $\mathbb{R}_-$). Comme f est continue, $(u_n)_s u$ converge vers un point fixe de f , donc vers 0. De plus, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f , donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Ainsi, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1 - \frac{\pi}{8}}{2^{n-1}}.$$

4. On a majoré le terme positif u_n par le terme général d'une série géométrique convergente, donc $\sum u_n$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq u_0 + \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) = 3 - \frac{\pi}{4}.$$