Analyse 3 – Intégrales impropres (1)

Correction de l'exercice 1 –

1. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}$. La fonction f est continue sur $]0,1[$, donc I_1 possède deux impropretés en 0 et en 1. On peut remarquer que $f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$, qui est de signe constant au voisinage de 0^+. Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, I_1 diverge. On peut aussi le prouver en constatant qu'une primitive de f est $F : x \mapsto \ln|x-1| - \ln x$, qui n'a pas de limite finie en 0^+.
2. Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$. Cette fonction est continue sur $[0,+\infty[$ d'où une unique impropreté en $+\infty$. De plus, une primitive de F est :
$$F : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right),$$
qui admet une limite finie (nulle) en $+\infty$. Ainsi :
$$I_2 = \Big[F(x)\Big]_0^{\lim\limits_{x\to+\infty}} = \ln 2.$$
3. Soit $f : x \mapsto \tan x$. Cette fonction est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}$, d'où une unique impropreté en $\frac{\pi}{2}$. Une primitive de f est $F : x \mapsto -\ln(\cos x)$, qui n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, I_3 diverge
4. Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, qui est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, I_4 a deux impropretés en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Une primitive de f est $F : x \mapsto -2\sqrt{\cos x}$, qui tend vers 0 en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$. D'où la convergence de I_4, et
$$I_4 = \Big[-2\sqrt{\cos(x)}\Big]_{\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{2}}}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}} = 0.$$
(la valeur ne nous étonne pas, par imparité de la fonction. Mais l'imparité ne suffit pas à justifier la convergence !)
5. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Une primitive : $F : x \mapsto \tan x$, qui n'admet pas de limite finie en $\frac{\pi}{2}$, donc I_5 diverge.
6. Soit $f : \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$, continue sur $[0,+\infty[$, et équivalente à $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$, d'où la convergence. Une primitive (s'obtient par DES) :
$$F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x.$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4}$, donc
$$I_6 = \Big[F(x)\Big]_0^{\lim\limits_{x\to+\infty}} = \frac{\pi}{4}.$$
7. Soit f l'intégrande, continue sur $]1,2]$, d'où une impropreté en 1.
   - Si $\beta \neq 1$, une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta} x$. Ainsi$F$ admet une limite finie en 1 si et seulement si $1-\beta > 0$, donc $\beta < 1$. Ainsi, on a divergence si $\beta > 1$, et convergence si $\beta < 1$, et dans ce cas,
   $$I_7 = \left[\frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta} x\right]_{\lim\limits_{x\to1^+}}^{2} = \frac{\ln^{1-\beta}(2)}{1-\beta}.$$
   - Si $\beta = 1$, une primitive est $F : \ln(\ln x)$, qui n'a pas de limite finie en 1, d'où la divergence.

   Soit f l'intégrande, continue sur $[3,+\infty[$, d'où une impropreté en $+\infty$.
   - Si $\beta \neq 1$, une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{1}{1-\beta}(\ln\ln x)^{1-\beta}$. Ainsi F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $1-\beta < 0$, donc $\beta > 1$. Ainsi, on a divergence si $\beta < 1$, et convergence si $\beta > 1$, et dans ce cas,
   $$I_7 = \left[\frac{1}{1-\beta}(\ln\ln x)^{1-\beta}\right]_3^{\lim\limits_{x\to+\infty}} = \frac{(\ln\ln(3))^{1-\beta}}{\beta-1}.$$

- Si $\beta = 1$, une primitive est $F : \ln(\ln(\ln x))$, qui n'a pas de limite finie en $+\infty$, d'où la divergence.

Correction de l'exercice 4 – Soit$x > 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis entre a et x, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, x[$, continue sur $[a, x]$, et f' étant minorée sur $[a, x]$ par α, on a :

$$f(x) - f(a) \geqslant \alpha(x - a) \qquad \text{donc:} \qquad f(x) \geqslant f(a) + \alpha(x - a).$$

Alors, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\dfrac{f(x)}{x^2} \geqslant \dfrac{f(a)}{x^2} + \alpha\dfrac{x - a}{x^2}$.
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(a)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre 2, et de plus

$$\frac{x - a}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x},$$

donc, les deux expressions étant positives au voisinage de $+\infty$, il en découle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - a}{x^2}\,\mathrm{d}x$ diverge, par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre 1. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{f(a)}{x^2} + \alpha\frac{x - a}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ diverge, comme somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente. Par conséquent, d'après le théorème de comparaison par inégalité, la fonction minorante étant positive pour x assez grand (donc la majorante aussi), on obtient la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Correction de l'exercice 6 –

1. Diverge (cdv, puis minorer l'intégrale sur chaque intervalle $[k\pi, (k + 1)\pi]$)
2. Converge (cdv puis IPP)
3. Diverge (équivalent à une série de Bertrand)
4. Converge (faire un DL à l'ordre 2 en la variable $\frac{\ln x}{x}$)
5. Converge (majoration pour x assez grand)
6. Converge
7. Diverge (équivalent)
8. Converge ($x^2 f(x)$)
9. Converge ($x^2 f(x)$)
10. Diverge ($x f(x)$)
11. Diverge (minoration)
12. Converge ssi $3a - 2b > -1$ (montrer que $\operatorname{Arctan} t(1 + t) > t$, puis équivalents)
13. Diverge (minorer l'intégrale sur $[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi]$ par le terme général d'une série divergente)
14. Diverge (même principe, sur l'intervalle $[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{3\pi}{4}]$.)
15. Converge ($\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3 \sin^2 x} \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$)
16. Converge (cdv)
17. Converge (DL pour se ramener à une intégrale de Dirichlet et un o qui assure la convergence absolue)
18. Converge (cdv)
19. Diverge (DL)
20. Converge (équivalents)
21. Converge ($x^2 f(x)$)
22. Converge (cdv $y = -\ln x$)
23. Converge ssi $a \in 2\mathbb{N}^*$ (séparer $a > 0$ et $a \leqslant 0$, puis étudier l'existence d'une racine du dénominateur, suivant la parité de a)

24. Converge (en 0, cdv $y = \frac{1}{x}$, en $+\infty$, formules de trigonométrie)

Correction de l'exercice 7 – (Rédaction à parfaire : ce ne sont que des schémas des calculs)

4. Impropreté en 0 seulement. IPP en posant pour tout t de $]0,1]$:
$$u'(t) = t^\alpha \qquad u(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad v(t) = \ln t \qquad v'(t) = \frac{1}{t}.$$
La fonction uv tend vers 0 donc IPP sur l'intégrale impropre, en comparant d'abord la nature de l'intégrale (la seconde CV car c'est une intégrale de Riemann) :
$$\int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{\mathrm{d}t} = -\int_0^1 \frac{t^\alpha}{\alpha+1}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

5. On va être obligé de séparer l'intégrale, afin de faire une IPP sur le deuxième terme seulement. La première des deux intégrales au moins étant divergente, on ne peut pas le faire sans restreindre l'intervalle d'intégration. Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$,
$$\int_a^b \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x = b - a - \int_a^b x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x.$$
Ainsi, une IPP (validité à justifier) donne
$$\begin{aligned} I(a,b) = \int_a^b x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x &= \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}(b-a) - \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} b + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} a. \end{aligned}$$
Par conséquent,
$$\int_a^b \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x = b - a - \left(\frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} b + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} a.\right)$$
On fait tendre a vers 0, sans problème :
$$\int_0^b \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x = b - \frac{b^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{b} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} b.$$
On fait tendre b vers $+\infty$, en utilisant $\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ au voisinage de 0 :
$$\int_0^{+\infty} \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

6. Une impropreté en $+\infty$. Convergence immédiate par $x^2 f(x)$, du fait de l'exponentielle.
cdv : $y = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, $x = \ln(y^2-1)$, $\mathrm{d}x = \frac{2y}{y^2-1}$.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\ \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{y^2-1}\ \mathrm{d}y = \left[\ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\lim_{+\infty}} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

7. Mise sous forme canonique :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\lim_{+\infty}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

8. Prendre $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ (sinon ce n'est pas défini). Improprétés en 1 et 2.
$$I = \int_1^2 \frac{2\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}. \qquad \text{cdv } y = 2x-3 : I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ \mathrm{d}y. \qquad \text{cdv } y = \sin t : I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}t = \pi.$$

Correction de l'exercice 10 – Comparaison par équivalences : un contre-exemple

1. Puisque sin est borné, et $\lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{\ln t} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \frac{\sin t}{\ln t} = o(1).$$

On en déduit que :

$$1 + \frac{\sin t}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} 1 \qquad \text{puis:} \qquad \boxed{\frac{\sin t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{t}\left(1 + \frac{\sin t}{\ln t}\right)}.$$

2. Un classique parmi les classiques ! On procède par intégration par partie (méthode à utiliser, ou au moins à essayer, en $+\infty$ dès que vous avez un sin)

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

On pose u et v les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi, +\infty[$, définies par :

$$\forall t \in [\pi, +\infty[\qquad \begin{array}{ll} u(t) = -\cos t & v(t) = \dfrac{1}{t} \\ u'(t) = \sin t & v'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{array}$$

On a :

$$\forall t \in [\pi, +\infty[, \quad u(t)v(t) = -\frac{\cos t}{t} \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^{\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

Or, pour tout $t \in [\pi, +\infty[$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ en $+\infty$), d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument (donc converge). D'après ce qui précède, on en déduit la $\boxed{\text{convergence de } \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}$

À savoir faire les yeux fermés...

3. (a) Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ sont décroissantes et positives sur $[\pi, +\infty[$. Leur produit $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est donc aussi décroissant (attention à ne pas oublier la positivité, nécessaire pour l'étude des variations d'un produit).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, on a :

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], \quad \frac{1}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)} \leqslant \frac{1}{t\ln t}.$$

   Puisque $\sin^2 t \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], \quad \frac{\sin^2 t}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)} \leqslant \frac{\sin^2 t}{t\ln t},$$

   puis, par positivité de l'intégrale (non impropre ici) :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

   Or,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'inégalité précédente amène :

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)\ln((n+1)\pi)} \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\ \mathrm{d}t}$$

(c) On a :

$$\ln((n+1)\pi) = \ln(n+1) + \ln(\pi) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\pi \underset{+\infty}{\sim} \ln n,$$

car $\ln\pi = o(\ln n)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = o(\ln n)$, puisque $\ln n$ tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}.$$

Les deux termes étant positifs pour tout $n \geqslant 2$, les séries $\sum \dfrac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}$ et $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ sont donc de même nature, d'après le théorème de comparaison par équivalences des séries à termes positifs. On reconnaît là une série de Bertrand (HP) dans le cas « critique ». On se souvient alors que la méthode dans ce cas est de faire une comparaison avec une intégrale : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ étant décroissante sur $[2,+\infty[$, positive, de limite nulle, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ sont de même nature.

Or, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est $F : t \mapsto \ln(\ln t)$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ diverge, donc la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ diverge, donc la série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}$ diverge. Puisqu'elle est à termes positifs,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)} = +\infty.$$

Or, en sommant l'inégalité de la question précédente entre $n=1$ et $n=N$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\forall N \geqslant 1, \quad \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\ \mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln((n+1)\pi)}.$$

D'après le théorème de minoration, on en déduit donc que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\ \mathrm{d}t = +\infty,$$

donc, d'après le critère séquentiel pour les limites, $x \mapsto \displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\ \mathrm{d}t$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\ \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

On a, pour tout $t \in [\pi,+\infty[$,

$$\frac{\sin t}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln t}\right) = \frac{\sin t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t\ln t}.$$

Or, $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\ \mathrm{d}t$ diverge, donc $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t\ln t}\right)\ \mathrm{d}t$ diverge, c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln t}\right)\ \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

4. $\boxed{\text{La positivité des fonctions est indispensable pour comparer la nature d'intégrales par équivalents}}$

En effet on a montré que $\dfrac{\sin t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sin t}{t}\left(1+\dfrac{\sin t}{\ln t}\right)$, et pourtant, d'après les calculs qui précèdent, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge alors que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\left(1+\frac{\sin t}{\ln t}\right) \mathrm{d}t$ diverge.

Correction de l'exercice 11 – Limite sous le signe somme : un contre-exemple

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $x \mapsto 1+n^2x^2$ est continue et ne s'annule pas, et puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x$ n'est impropre qu'en la borne $+\infty$.

   De plus, f étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leqslant M.$$
   On a alors
   $$\forall x \geqslant 1, \quad \left|\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \frac{nM}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{nM}{n^2x^2} = \frac{M}{nx^2}.$$
   Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{M}{nx^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente (intégrale de Riemann de paramètre $2>1$, en une borne infinie). Ainsi, d'après le théorème de comparaison des intégrales par inégalités, appliqué à des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc convergente.

   Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x \text{ est convergente}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variables $x = \frac{t}{n}$, *i.e.* $t = nx$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, strictement croissant et bijectif de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ (car $n>0$), et vérifiant $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{n}$. Ainsi, le changement de variable est valide. La convergence de l'intégrale initiale étant déjà aquise, le théorème de changement de variable assure la convergence de la seconde, et on a :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{nf\left(\frac{t}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{t}{n}\right)^2}\frac{\mathrm{d}t}{n} \qquad \text{soit:} \quad \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t}.$$

3. Cette question n'est pas évidente, car on n'est pas autorisé à passer la limite à l'intérieur de l'intégrale. L'idée est de comparer cette intégrale à celle qu'on obtiendrait formellement en passant la limite à l'intérieur, c'est-à-dire, à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$. Effectuons donc la différence des 2, en vue d'une majoration :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\left|f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right|}{1+t^2}\, \mathrm{d}t,$$
   d'après l'inégalité triangulaire, ces intégrales étant toutes convergentes, par un arguement de comparaison similaire à celui de la première question, le numérateur étant borné (par $2M$).

   Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue, il existe δ tel que pour tout $x \in [0,\delta[$, $|f(x)-f(\delta)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$ (le facteur π a été rajouté une fois arrivé en fin d'argument, afin de rectifier le coefficient trouvé en fin de majoration).

   Ainsi, étant donné $n>0$, pour tout $t \in [0,n\delta[$, $|f\left(\frac{t}{n}\right) - f(\delta)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$. On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{n\delta} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)} + \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{\left|f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right|}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Puisque, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right| \leqslant |f\left(\frac{t}{n}\right)|+|f(0)| \leqslant M+M=2M,$$

on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t-\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{n\delta} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)}+\int_{n\delta}^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ est convergente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\, \mathrm{d}t=0$, d'après les propriétés du reste d'une intégrale convergente. Ainsi, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{2M}{1+t^2}\, \mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\int_0^{n\delta} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)}<\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(1+t^2)}=\frac{\varepsilon}{\pi}\Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{\lim +\infty}=\frac{\varepsilon}{2}$$

(c'est pour obtenir cette valeur qu'on a rajouté le facteur π dans l'utilisation de la continuité de f un peu plus haut)

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t-\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ainsi, par définition de la limite, $\left(\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t=f(0)\Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{\lim +\infty},$$

d'où finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\cdot f(0).}$$

Avec des hypothèses supplémentaires sur f (caractère $\mathcal{C}^1$ et existence d'une limite finie en $+\infty$), on aurait pu s'en sortir plus facilement à l'aide d'une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto f\left(\frac{t}{n}\right)$ et en primitivant $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ (je vous laisse mettre l'argument en place, c'est un bon entraînement)

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (fixé).
   - Si $f(x)=0$, on a directement , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}=0$, donc $g(x)=0$.
   - Si $f(x) \neq 0$,

     $$\frac{nf(x)}{1+n^2x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{nf(x)}{n^2x^2}=\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{n},$$

     donc

     $$\lim_{n\to+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}=0 \qquad \text{donc:} \qquad g(x)=0.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x)=0.}$
5. $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x) \text{ converge et vaut } 0}$ (intégrale de la fonction nulle !)
6. Pour tout fonction f bornée et continue sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant de plus que $f(0) \neq 0$, on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}x$$

   L'égalité n'est vérifiée que si $f(0)=0$. Ainsi, attention à l'erreur classique (beaucoup trop fréquente) consistant à passer une limite à l'intérieur de l'intégrale. VOUS N'AVEZ PAS LE DROIT DE LE FAIRE !

Correction de l'exercice 13 –

1. $I_1 = 4$ (utiliser la fonction Γ !)
2. $I_2 = 38\mathrm{e}^{-2}$ (cdv et développement du binôme)
3. $I_3 = 3$ (cdv)
4. $I_4 = \frac{5\sqrt{\pi}}{72\sqrt{3}}$ (cdv $u = 3t$, puis se ramener à $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$)
5. $I_5 = 23$ (cdv $x = -t$)
6. $I_6 = 6 + \sqrt{\pi}$ (parité /imparité pour ramener à $\displaystyle\int_0^{+\infty}$)
7. $I_7 = \sqrt{\pi}$ (cdv puis intégrale de Gauss)
8. $I_8 = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}$ (mise sous forme canonique, puis cdv)
9. $I_9 = \mathrm{e}^{\frac{7}{2}}\sqrt{\pi}$
10. $I_{10} = \frac{n!}{2}$ (cdv $y = x^2$)
11. $I_{11} = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
12. $I_{12} = \frac{e^{10}\sqrt{\pi}}{2}$ (mise sous forme canonique puis cdv)

Correction de l'exercice 14 – Je me contente de donner les grandes lignes, sans entrer dans les détails des preuves. La méthode générale utilisant l'inégalité de T-L est exposée dans la première question ; pour les autres exemples, on se contentera de la recherche d'un majorant adéquat de $|f_t''|$.

1. Soit $f_t : x \mapsto \frac{t^{x-1}}{1-t}$. Il y a une impropriété en 0, avec convergence si et seulement si $x > 0$, car $f_t(x) \underset{t0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ puis comparaison à une intégrale de Riemann.

   La fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^2$, et en écrivant la puissance sous forme exponentielle :

   $$f_t''(x) = \frac{(\ln t)^2 t^{x-1}}{1+t} \ \mathrm{d}t$$

   Ainsi, étant donné $x > 0$, et $h \in]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}[$, pour tout $t \in]0,1]$ et tout $y \in]x-h, x+h[\subset]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[$, en utilisant la croissance de exp :

   $$|f_t''(y)| \leqslant \frac{(\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1}}{1+t} \leqslant (\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1}.$$

   D'après l'inégalité de T-L (ITL) entre x et $x+h$, divisée ensuite par $|h| > 0$, on a alors

   $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}(\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1}.$$

   Montrons la convergence de l'intégrale obtenue en intégrant le terme de droite entre 0 et 1 (une seule impropriété en 0) :

   $$t^{1-\frac{x}{4}} \cdot (\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} = t^{\frac{x}{4}}(\ln t)^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

   d'après les croissances comparées, donc $(\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}}\right)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre $1 - \frac{x}{4} < 1$, en la borne 0, on obtient la conevergence de $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} \ \mathrm{d}t$, puis, par comparaison, la CVA (donc la CV) de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \ \mathrm{d}t$. On peut donc intégrer l'inégalité obtenue précédemment, et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient alors :

   $$\begin{aligned}\left|\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} - \int_0^1 f_t'(x) \ \mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \ \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 (\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} \ \mathrm{d}t \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

car l'intégrale est indépendante de h (la première égalité doit se justifier en étudiant les convergences, et en remarquant que la nature de 3 parmi les 4 intégrales utilisés dans cette identité a déjà été étudiée, ce qui fourni la convergence de la 4e)

On en déduit que le taux d'accroissement de f_1 admet une limite finie en x, donc que f_1 est dérivable en x, et

$$f_1(x) = \int_0^1 f_t'(x)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(\ln t)t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t.$$

2. Même principe :
   - Impropriété en 0, mais l'intégrale est faussement impropre (limite égale à x) donc $D_{f_2} = \mathbb{R}$
   - Avec des notations similaires au 1 pour $f_t(x)$:

     $$f_t''(x) = -t\sin(xt), \qquad \text{donc:} \qquad |f_t''(x)| \leqslant 1$$

     pour tout $t \in [0,1]$. La simplicité de ce majorant nou smet dans une situation beaucoup plus confortable qu'en 1 : L'ITL donne pour tout $t \in [0,1]$:

     $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}.$$

   - Le raisonnement est alors le même qu'en 1, en remarquant que $\displaystyle\int_0^1 1\ \mathrm{d}t$ converge (et vaut 1), et en intégrant l'ITL, puis en utilisant l'inégalité triangulaire. Ainsi

     $$f_2(t) = \int_0^1 f_t'(x)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(xt)\ \mathrm{d}t.$$

     Chose singulière, ici, cette dérivée se calcule explicitement :

     $$f_2(t) = \frac{1}{x}\left[\sin(xt)\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x}.$$

   - On peut ici retrouver ce résultat sans utiliser la technique générale de dérivation sous le signe intégral (utilisation de ITL), en effectuant le changement de variable $u = xt$, qui permet de sortir la dépendance en x de l'intégrale : en effet par ce cdv, on obtient directement

     $$f_2(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u,$$

     et on obtient donc de façon beaucoup plus rapide le fait que $f_2$est une primitive de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

3. - Une fausse impropriété en 0, et convergence en $+\infty$ (en considérant $t^2 f_t(x) \to 0$ à cause de l'exponentielle. Le domaine est donc $\mathbb{R}$.
   - On a :

     $$|f_t''(x)| = |\cos(xt)|\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

     ainsi, pour tout x et tout $h \neq 0$, l'ITL donne ici :

     $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\mathrm{e}^{-t}.$$

   - On termine comme en 1, en constatant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est convergente (c'est $\Gamma(1)$). Ainsi,

     $$f_3'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

4. - Impropriétés en 0 et $+\infty$; convergence en $+\infty$ (règle $t^2 f(t)$), convergence en 0 ssi $x > -1$ (comparaison par équivalence à une intégrale de Riemann)

- Soit $t>0$. Soit $-1<a<b$, $y\in]a,b[$.

$$|f_t''(y)| = |(\ln t)^2 t^y \mathrm{e}^{-t^2}| \leqslant \begin{cases} (\ln t)^2 t^a \mathrm{e}^{-t^2} & \text{si } t\in]0,1] \\ (\ln t)^2 t^b \mathrm{e}^{-t^2} & \text{si } t\geqslant 1, \end{cases}$$

la distinction des cas provenant du signe de $\ln t$, et de la croissance de l'exponentielle, obtenue en écrivant t^x sous forme exponentielle. Soit donc g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(t) = \begin{cases} (\ln t)^2 t^a \mathrm{e}^{-t^2} & \text{si } t\in]0,1] \\ (\ln t)^2 t^b \mathrm{e}^{-t^2} & \text{si } t\geqslant 1, \end{cases}$$

On a donc, d'après l'ITL, pour tout x et tout h tels que x et $x+h$ soient dans $]a,b[$

$$\left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} g(t).$$

L'argument de la question 1 s'adapte donc ici, à condition de prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$, c'est-à-dire la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 (\ln t)^2 t^a \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^b \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

La convergence de I_2 s'obtient facilement en utilisant $t^2 f(t)$ en $+\infty$
Comme $a>-1$, on obtient la convergence de I_1 en multipliant par t^c, où c est un réel dans $]-a,1[$, et en utilisant les CC comparées pour obtenir une limite nulle en 0. On compare ensuite à une intégrale de Riemann convergente en 0.
Ainsi, I_1 et I_2 étant convergentes, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ converge, et on peut utiliser l'argument de 1, pour obtenir, pour tout $x\in]a,b[$:

$$f_4'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout choix de a et b tels que $-1<a<b$, il est toujours possible (pour tout $x>-1$) de trouver a et b vérifiant ces hypothèses tels que $x\in]a,b[$ (prendre par exemple $a=\frac{-1+x}{2}$ et $b=x+1$), donc la formule reste valable pour tout $x>-1$.

5. $f_5 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$
   - Impropre en 0 et en 1. CV en 1 car $f_t(x) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$, puis comparaison à une intégrale de Riemann. CV en 0 ssi $x>-1$, car équivalent à t^x d'où comparaison à une intégrale de Riemann.
   - Soit $t\in]0,1[$. Soit $a>-1$. Pour tout $y>a$,

   $$|f_t''(y)| = \frac{(\ln t)^2 t^y}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{(\ln t)^2 t^a}{\sqrt{1-t^2}}.$$

   On termine comme d'habitude, en utilisant l'ITL entre x et $x+h$, où x et $x+h$ sont dans $]a,+\infty[$ (pour pouvoir utiliser le majorant trouvé) et en constatant que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2 t^a}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ converge (faussement impropre en 0 et $t^c f(t)$ en 0, où $c\in[-a,1]$)
   On a donc la dérivabilité sur $]a,+\infty[$, pour tout $a>-1$, donc la dérivabilité sur $]-1,+\infty[$, et pour tout $x>-1$:

   $$f_5'(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t) t^x}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t.$$

Correction de l'exercice 15 – (éléments de preuve à développer)

1. Seule impropriété en $+\infty$, et $e^{-x} = o(x)$ en $+\infty$, d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$. On reconnaît alors une intégrale de Bertrand, dans un cas particulièrement simple,puisque pour tout $x \geqslant e$,

$$\frac{\ln x}{x} \geqslant \frac{1}{x},$$

ce qui suffit à assurer la divergence (ou alors faire par primitivation directe, puisqu'on a une expression de la forme $u' \cdot u$.)

2. Seule impropriété en $+\infty$. On a

$$f(x) = e^{-\frac{x}{x+1}\ln x} = e^{-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\ln x} = e^{-\ln x(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right))} = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}+o\left(\frac{\ln x}{x}\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, ainsi la seconde exponentielle tend vers 1, donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x},$$

d'où la divergence.

3. Impropriétés en 0 et $+\infty$. Faussement impropre en 0.
   En $+\infty$: considérer $x^2 f(x) = e^{2\ln x - (\ln x)^2}$. Or, $\ln x = o((\ln x)^2)$, donc l'exposant tend vers $-\infty$ en $+\infty$, donc $x^2 f(x) \to 0$. Cela assure la convergence, par comparaison à une intégrale de Riemann.

4. Impropriétés en 0 et $+\infty$
   - $f(x) \underset{0}{\sim} \ln x$ et $\sqrt{x}\ln x \to 0$ en 0, d'où la CV en la borne 0, par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$ (peut aussi se faire par primitivation directe du ln)
   - En $+\infty$: IPP à la façon de l'intégrale de Dirichlet, avec $u : x \to -\cos x$ et $v : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, et vérifiant $uv \to 0$ en $+\infty$ d'après CC. Ainsi, l'intégrale étudiée est de même nature en la borne $+\infty$ que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\cos x)(1-\ln x)}{x^2}\, dx$. On majore ensuite :

   $$\left|\frac{(\cos x)(1-\ln x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

   Puis, à la façon des intégrales de Bertrand, on considère $x^{\frac{3}{2}}g(t)$ pour obtenir la convergence.

Correction de l'exercice 16 – (éléments de calcul à développer ; attention notamment à bien justifier les IPP et CDV effectués sur les intégrales impropres)

1. Convergence par comparaison en $+\infty$ à une intégrale de Riemann de paramètre 4 (par équivalent).

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

   Justifiez bien la CV des intégrales pour écrire cela.
   On utilise Arctan pour la première, une IPP pour la seconde, avec $u : x \mapsto \frac{-1}{2(x^2+1)}$, $v : x \mapsto x$, de classe $\mathcal{C}^1$, $uv \to 0$ en $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

2. Seules impropriétés en $-\infty$ et $+\infty$;, convergence par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre 3.
   Par parité :

$$I_2 = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^3}\, dx = 2\left[\frac{-1}{2(1+x)^2}\right]_0^{\lim_{+\infty}} = 1.$$

3. Seules impropriétés en $-\infty$ et $+\infty$; Convergence par comparaison par $\sim$ à des intégrales de Riemann de paramètre 4.

   On effectue une DES, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = -\frac{x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

   On englobe TOUS les termes en x du second terme dans une dérivée du dénominateur :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = -\frac{x}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}.$$

   On effetue enfin une mise sous forme canonique :

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = -\frac{x}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)},$$

   et on fait apparaître une dérivée de Arctan u :

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = -\frac{x}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

   Une primitive en est :

$$\begin{aligned} F : x \mapsto & -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

   Les limites de F sont alors faciles à calculer et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \Big[F(x)\Big]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

4. Une impropriété en 0. Les fonctions $u(x) = \ln x$, $v(x) = -\frac{1}{1+x}$ ne vérifiant pas les hypothèses requises sur uv pour pouvoir efectuer l'IPP sur les intégrales impropres, on intègre dans un premier temps entre a et 1, où $a \in]0,1[$. On obtiendra la convergence et la valeur en faisant tendre a vers 0.

   Par l'IPP mentionnée ci-dessus

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\ln a}{1+a} + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} \\ &= \frac{\ln a}{1+a} + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\ &= \frac{\ln a}{1+a} + \ln(1) - \ln(a) - \ln(2) + \ln(a+1) \\ &= \ln(a)\left(\frac{1-(1+a)}{1+a}\right) - \ln 2 + \ln(a+1) \\ &= \frac{a\ln a}{1+a} - \ln 2 + \ln(a+1). \end{aligned}$$

   Or, $a\ln a \to 0$ lorsque $a \to 0$, d'où la convergence de l'intégrale et

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\ln 2.$$

Correction de l'exercice 17 – La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale admet donc deux improretés en $-\infty$ et $+\infty$.

Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \operatorname{Arctan} \mathrm{e}^x$. Alors u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) \frac{\mathrm{e}^x}{1 + (\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1}{e^{-x} + e^x}.$$

Ainsi, $f = u \cdot u'$. Une primitive de f est donc $F = \frac{1}{2} u^2$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}^2 e^x.$$

Par composition des limites, F admet une limite égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ en $+\infty$, et une limite égale à $-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ en $-\infty$. Ainsi, l'intégrale est convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Correction de l'exercice 18 – Attention à ne pas aller trop vite, et à ne pas utiliser directement un équivalent ou une inégalité, car l'intégrande n'est pas de signe constant ici.
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, il n'y a donc qu'une impropreté en $+\infty$.
On a, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x+\cos x} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{\cos x}{x}} - 1\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{8}\frac{\cos^2 x}{x^2} + o\left(\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8}\frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant \frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, en $+\infty$. Ainsi, les fonctions étant positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x$ converge.
D'après le théorème de comparaison par o, il en résulte que la nature de l'intégrale de f est la même que la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$.
On fait une IPP, en posant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$:

$$\forall x \in [0, +infty[, \quad u(x) = \sin x, \qquad u'(x) = \cos x, \qquad v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad v'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

La limite de uv étant nulle en $+\infty$, l'intégrale de f a la même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x$, qui est absolument convergente, puisque

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \left|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}\right) \, \mathrm{d}x$ converge.

Correction de l'exercice 19 –

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-ax} \operatorname{Arctan} x$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $I(a)$ est impropre uniquement en $+\infty$. De plus :
   - si $a > 0$, puisque Arctan est minorée par $\frac{\pi}{2}$, et positive sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-ax}$. Or, l'intégrale exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x$ est convergente (puisque $a > 0$), donc, d'après le théorème de comparaison par inégalités d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $I(a)$ est convergente.
   - si $a \leqslant 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geqslant \operatorname{Arctan} x$, et comme Arctan admet une limite strictement positive en $+\infty$, $\frac{1}{x} = o(f(x))$ au voisinage de $+\infty$. La divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et la positivité des fonctions amène alors la divergence de $I(a)$.

Par conséquent, $\boxed{I(a) \text{ converge si et seulement si } a > 0.}$

2. Soit $a > 0$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$u(x) = \operatorname{Arctan} x \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$. Cette dernière hypothèse nous permet de faire une intégration par partie directement sur les intégrales impropres, et la convergence de l'intégrale initiale $I(a)$ nous assure alors la convergence de l'intégrale à laquelle on parvient :

$$I(a) = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\lim_{+\infty}} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

On refait une deuxième intégration par parties, avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, définies, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}.$$

Encore une fois, l'existence de la limite (nulle) de uv en $+\infty$ et la convergence de l'intégrale initiale nous assurent la convergence de l'intégrale à laquelle on parvient, et nous permettent d'écrire :

$$I(a) = \frac{1}{a}\Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\lim_{+\infty}} - \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{2x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{I(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.}$$

3. Inutile d'étudier les variations de la fonction. La fonction $g \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$ tend vers 0 en $+\infty$. Donc, par définition de la limite, avec $\varepsilon = 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x > A$, $|g(x)| \leqslant 1$. De plus, g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, donc elle est bornée sur cet intervalle. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in [0, A]$, $|g(x)| \leqslant M$. En prenant $M' = \max(1, M)$, indépendant de x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g(x)| \leqslant M'.$$

Donc $\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$

Soit M' un majorant de g sur $\mathbb{R}_+$, on a alors (l'intégrale exponentielle étant conevergente, et par positivité de g) :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant M'\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\Big]_0^{\lim_{+\infty}} = \frac{1}{a}.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{1}{a} = 0$, on obtient l'existence d'une limite de l'intégrale lorsque a tend vers $+\infty$, et

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 0.}$$

4. Ainsi, au voisinage de $+\infty$ pour la variable a,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = o(1) \qquad \text{donc:} \qquad \frac{2}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

On en déduit que $I(a) = \dfrac{1}{a^2} + o\left(\dfrac{1}{a^2}\right)$, et donc :

$$\boxed{I(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}}$$