

Analyse 4 – Intégrales impropres (2)

Correction de l'exercice 1 – (Étude de la fonction Γ)

1. On rappelle que d'après le cours, Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. Alors

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \geq \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt,$$

car la fonction intégrée est positive et $]0, 1] \subset]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in]0, 1]$, $e^{-t} \geq e^{-1}$, donc, t^{x-1} étant positif, et par propriété de croissance de l'intégrale,

$$\Gamma(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1} dt.$$

On en déduit que

$$\Gamma(x) \geq \frac{1}{e} \left[\frac{t^x}{x} \right]_{\lim_{0^+}}^1 = \frac{1}{xe}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xe} = +\infty$, donc, d'après le théorème d'existence d'une limite infinie par minoration, Γ admet une limite en 0^+ , et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Soit $x > 1$. De la même façon, puisque la fonction intégrée est positive, et que $[2, +\infty[\subset]0, +\infty[$, on a :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \geq \int_2^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t} dt,$$

car la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est croissante sur $[2, +\infty[$ (puisque $x-1 > 0$), donc minorée sur cet intervalle par sa valeur en 2.

Ainsi, pour tout $x > 1$,

$$\Gamma(x) \geq 2^{x-1} \left[-e^{-t} \right]_2^{+\infty} = \frac{2^{x-1}}{e^2}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x-1}}{e^2} = +\infty$, donc, d'après le théorème de minoration, Γ admet une limite en $+\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_t(x) = t^{x-1} e^{-t}$.

3. À t fixé, $x \mapsto t^{x-1} = e^{(x-1) \ln t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^{+\infty}$) sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que composée d'une fonction affine et d'une exponentielle. Ainsi, f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque e^{-t} est une constante par rapport à x . De plus (on dérive *par rapport à x*) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_t(x) = e^{-t} \ln t e^{(x-1) \ln t} = e^{-t} \ln t \cdot t^{x-1}, \quad \text{puis:} \quad f''_t(x) = e^{-t} (\ln t)^2 e^{(x-1) \ln t} = e^{-t} (\ln t)^2 t^{x-1}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq \min\left(\frac{x}{2}, 1\right)$.

(a) Soit $\alpha_x = \min\left(\frac{x}{2}, 1\right)$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\left[\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right]$, donc sur le sous-intervalle $[x - \alpha_x, x + \alpha_x]$. Or, puisque $|h| \leq \alpha_x$, $x + h$ est dans cet intervalle. Donc, d'après l'inégalité de Taylor Lagrange appliquée entre x et $x + h$,

$$|f_t(x+h) - f_t(x) - hf'_t(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2(t, x),$$

où $M_2(t, x)$ est un majorant de $|f''_t|$ sur l'intervalle $[x - \alpha_x, x + \alpha_x]$ (il peut dépendre de t et x qui sont fixés, mais pas de h). Remarquez que l'inégalité de l'énoncé n'est pas définie lorsque $h = 0$, nous rajoutons donc l'hypothèse $h \neq 0$. Dans ces conditions, on peut diviser par $|h|$ et on obtient :

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f'_t(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t, x),$$

Vous aurez rectifié par vous-même la valeur absolue manquante.

Déterminons une valeur possible de $M_2(t, x)$.

- Supposons $t \geq 1$. Alors pour tout $y \in [x - \alpha_x, x + \alpha_x]$,

$$|f_t''(y)| = (\ln t)^2 e^{-t} t^{y-1} \leq (\ln t)^2 e^{-t} t^x,$$

car, puisque $\alpha_x \leq 1$, $y \leq x + 1$, donc $y - 1 \leq x$, et de plus $t \geq 1$.

- Supposons $t < 1$. Alors par le même raisonnement $y \geq x - \alpha_x \geq x - \frac{x}{2}$, donc $y - 1 \geq \frac{x}{2} - 1$, et comme $0 < t < 1$, $t^{y-1} \leq t^{\frac{x}{2}-1}$. Ainsi,

$$|f_t''(y)| \leq (\ln t)^2 e^{-t} t^{\frac{x}{2}-1},$$

On peut donc choisir $M_2(t, x)$ comme étant égal à une de ces deux valeurs, en discutant suivant la valeur de t .

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- La fonction $g : t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t} t^{\frac{x}{2}-1}$ est continue sur $]0, 1]$. La seule impropriété de l'intégrale se trouve donc en 0. Or, en 0, on a

$$t^{-\frac{x}{4}+1} |g(t)| = t^{\frac{x}{4}} (\ln t)^2 e^{-t}.$$

Puisque $\frac{x}{4} > 0$, les croissances comparées entre puissances et logarithme en 0 amènent :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\frac{x}{4}+1} |g(t)| = 0, \quad \text{donc:} \quad |g(t)| = o_{0^+} \left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}} \right).$$

Or, $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\frac{x}{4}}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $1 - \frac{x}{4} < 1$, donc, les fonctions

étant positives, $\int_0^1 |g(t)| dt$ converge, donc $\int_0^1 g(t) dt$ converge, donc converge absolument.

- La fonction $h : t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t} t^x$ est continue sur $[1, +\infty[$. La seule impropriété de l'intégrale se situe donc en $+\infty$. Or, l'exponentielle « va l'emporter ». Plus précisément, d'après les croissances comparées,

$$(\ln t)^2 = o_{+\infty}(t) \quad \text{donc:} \quad (\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} = o_{+\infty}(t^{\frac{x}{2}}).$$

De plus, d'après les croissances comparées, $e^{-t} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^{2+\frac{x}{2}}} \right)$, donc :

$$h(t) = o_{+\infty} \left(\frac{t^{\frac{x}{2}}}{t^{2+\frac{x}{2}}} \right) \quad \text{donc:} \quad h(t) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Ainsi, comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre 2, et par positivité

des fonctions, on en déduit, d'après le théorème de comparaison par o que $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ converge.

(c) On déduit de la question précédente que, à x fixé, $\int_0^{+\infty} M_2(t, x) dt$ est convergente. Alors, par le

théorème de comparaison par inégalité, pour tout $h \in [x - \alpha_x, x + \alpha_x]$, $h \neq 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) dt$ converge absolument. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| dt \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} M_2(t, x) dt.$$

Or, par les propriétés de convergence de l'intégrale Γ , $\int_0^{+\infty} f_t(x+h) dt$ et $\int_0^{+\infty} f_t(x) dt$ convergent.

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) dt$ converge également, on en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} f_t'(x) dt$.

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) dt \right| &= \left| \frac{\int_0^{+\infty} f_t(x+h) dt - \int_0^{+\infty} f_t(x) dt}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x) dt \right| \\ &= \left| \frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x) dt \right|. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient, pour tout $h \in [x - \alpha_x, x + \alpha_x]$, $h \neq 0$:

$$\left| \frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f'_t(x) \, dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} M_2(t, x) \, dt.$$

Cette intégrale est convergente, et sa valeur ne dépend pas de h , donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} M_2(t, x) \, dt = 0.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} f'_t(x) \, dt$ ne dépend pas de h , on en déduit que $\frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0, donc que Γ est dérivable en x , et que :

$$\Gamma'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} = \int_0^{+\infty} f'_t(x) \, dt.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'expression ci-dessus donnant l'expression de Γ' en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

5. L'expression trouvée pour f''_t montre clairement que f''_t est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f'_t est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à t fixé. Soit donc $0 < x < y$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_t(x) \leq f'_t(y)$. Par la propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit, ces intégrales étant convergentes, que :

$$\int_0^{+\infty} f'_t(x) \, dt \leq \int_0^{+\infty} f'_t(y) \, dt \quad \text{donc:} \quad \Gamma'(x) \leq \Gamma'(y).$$

Ainsi, Γ' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 2 – (d'après EDHEC 1994)

1. La fonction $f : x \mapsto \left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right|$ est continue sur $]0, +\infty[$, d'où deux impropriétés en 0 et en $+\infty$.

• Étude en 0

On a en 0 un équivalent : $\left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right| \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi, f admet une limite finie en 0, donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Ainsi, $\int_0^1 |f(t)| \, dt$ converge.

• Étude en $+\infty$

Pour tout $t \geq 1$, on a :

$$0 \leq t^2 \left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right| \leq t \frac{e^{-\alpha t}}{1},$$

et puisque $\alpha > 0$, d'après les théorèmes de croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-\alpha t} = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} t^2 \left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right| = 0.$$

On a donc : $\left| e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre 2, on déduit que $\int_1^{+\infty} |f(t)| \, dt$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} |f(t)| \, dt$ est convergente, donc I est absolument convergente.

2. (a) Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A e^{-\alpha t} \, dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^A = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha A}).$$

Ainsi, en faisant tendre A vers $+\infty$, cette expression admet une limite finie, donc I_0 est convergente, et

$$I_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha A}) = \boxed{\frac{1}{\alpha} = I_0}.$$

- (b) Soit $n \geq 1$. Une rapide étude de continuité montre que les seules impropriétés de I_n et I_{n-1} sont en $+\infty$. On pose les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$:

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad u(t) = t^n \quad u'(t) = nt^{n-1} \quad v(t) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} \quad v'(t) = e^{-\alpha t}.$$

D'après les croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, l'existence de cette limite finie assure que les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ sont de même nature, donc I_{n-1} et I_n sont de même nature. Ainsi, si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n , et la formule d'intégration par parties amène :

$$I_n = \left[-\frac{1}{\alpha} t^n e^{-\alpha t} \right]_0^{\lim_{t \rightarrow +\infty}} + \frac{n}{\alpha} I_{n-1}.$$

On obtient donc $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$.

- (c) Par un argument de récurrence immédiat, la convergence de I_0 se propage aux rangs suivants. Donc I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par itération :

$$I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1} = \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2} = \cdots = \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n-1}{\alpha} \cdots \frac{1}{\alpha} I_0 = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} = I_n.$$

3. (a) La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$:

$$\sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad \text{et} \quad \sin^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$$

Ainsi

$$\sin^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin^{(2n+2)}(x)| \leq 1$. Ainsi, étant donné $n \in \mathbb{N}$, et x dans $\mathbb{R}_+^*$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$ entre 0 et x (la fonction sin étant de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur $[0, x]$), il vient

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Cette égalité est encore clairement vraie pour $x = 0$.

- (b) On a alors, du fait de la convergence absolue de ces intégrales, et d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t} \left(\sin t - \left(t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-\alpha t}}{t} \left(\sin t - \left(t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right) \right| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t} \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} dt, \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Ainsi, on obtient bien

$$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq K I_{2n+1},$$

où $K = \frac{1}{(2n+2)!}$.

- (c) En remplaçant les intégrales I_k par leur valeur trouvée en 2(c), il vient :

$$\left| I - \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2!}{\alpha^3 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2n)!}{\alpha^{2n+1} (2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{(2n+1)!}{\alpha^{2n+2} (2n+2)!}.$$

Après simplification des factorielles :

$$\left| I - \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right) \right| \leq \frac{1}{(2n+3)\alpha^{2n+2}}.$$

Puisque $a \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+3)e^{2n+2}} = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, l'expression interne à la valeur absolue a une limite finie, et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right) = I.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [0, 1]$. Comme $-t^2 \neq 1$, d'après la formule de sommation des termes d'une suite géométrique de raison $-t^2$, il vient :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} - \frac{1}{1+t^2},$$

et, après simplifications :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}}.$$

- (b) Soit $x \in [0, 1]$. En intégrant l'égalité précédente entre 0 et x , il vient :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt,$$

donc :

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \text{Arctan}(x) \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right|$$

Or, pour tout $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$, donc

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3},$$

car $x \in [0, 1]$. Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \text{Arctan}(x) \right| \leq \frac{1}{2n+3}}$$

- (c) Puisque $\frac{1}{2n+3} \rightarrow 0$, il vient que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \text{Arctan}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

En appliquant ce résultat avec $x = \frac{1}{\alpha} \in [0, 1]$, et d'après la question 3(c), on aboutit à :

$$\boxed{I = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Correction de l'exercice 3 – (Intégrale de Gauss)

1. Soit $t \in [0, 1]$. La fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en tant que composée d'une fonction polynômiale en x et de l'exponentielle, toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{f'_t(x) = -2x(t^2 + 1)e^{-x^2(t^2+1)}} \quad \text{et} \quad \boxed{f''_t(x) = (4x^2(t^2 + 1)^2 - 2(t^2 + 1))e^{-x^2(t^2+1)}}.$$

Puisque $0 \leq t \leq 1$, on a $1 \leq t^2 + 1 \leq 2$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f''_t(x)| = |4x^2(t^2 + 1)^2 + 2(t^2 + 1)|e^{-x^2(t^2+1)} \leq (|4x^2(t^2 + 1)^2| + |2(t^2 + 1)|)e^{-x^2(t^2+1)} \leq (4x^2 \cdot 2^2 + 4)e^{-x^2},$$

et donc finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \boxed{|f''_t(x)| \leq 4(4x^2 + 1)e^{-x^2}}.$$

Soit $\alpha : x \mapsto 4(4x^2 + 1)e^{-x^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. La fonction α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, en tant que produit et composée de fonctions qui le sont. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha'(x) = (-8x(4x^2 + 1) + 32x)e^{-x^2} = x(-32x^2 + 24)e^{-x^2}.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$\alpha'(x)$	+	0	-
$\alpha(x)$	0	$16e^{-\frac{3}{4}}$	0

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\alpha(x) \leq 16e^{-\frac{3}{4}}$, et on en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f_t''(x)| \leq 16e^{-\frac{3}{4}}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, et $u \in \mathbb{R}^*$ tel que $u + x \in \mathbb{R}_+$. La fonction f_t étant de classe $\mathcal{C}^2$ entre u et $u + x$, et sa dérivée seconde étant majorée sur cet intervalle (inclus dans $\mathbb{R}_+$) par $16e^{-\frac{3}{4}}$, il résulte de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à f_t entre x et $x + u$ que :

$$|f_t(x + u) - f_t(x) - uf_t'(x)| \leq \frac{|u|^2}{2} \cdot 16e^{-\frac{3}{4}},$$

soit, en divisant par $|u|(1 + t^2) > 0$:

$$\left| \frac{f_t(x + u) - f_t(x)}{u(1 + t^2)} - \frac{f_t'(x)}{1 + t^2} \right| \leq \frac{8|u|e^{-\frac{3}{4}}}{1 + t^2}.$$

Ainsi, les deux membres de l'inégalité étant continus sur $[0, 1]$ par rapport à t (à x fixé), on peut intégrer entre 0 et 1, et, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales définies, on trouve alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x + u) - g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} f_t'(x) dt \right| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{f_t(x + u) - f_t(x)}{u(1 + t^2)} - \frac{f_t'(x)}{1 + t^2} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{f_t(x + u) - f_t(x)}{u(1 + t^2)} - \frac{f_t'(x)}{1 + t^2} \right| dt \\ &\leq 8|u|e^{-\frac{3}{4}} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = 8|u|e^{-\frac{3}{4}} \operatorname{Arctan} 1 = 2\pi|u|e^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{u \rightarrow 0} 2\pi|u|e^{-\frac{3}{4}} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\left| \frac{g(x + u) - g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} f_t'(x) dt \right|$ admet une limite lorsque u tend vers 0 et

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left| \frac{g(x + u) - g(x)}{u} - \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} f_t'(x) dt \right| = 0$$

(cette limite se réduit à une limite à droite lorsque $x = 0$, à cause de la condition $x + u \geq 0$ imposée à u).

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(x + u) - g(x)}{u}$ admet une limite lorsque u tend vers 0 (limite à droite si $x = 0$), donc que g est dérivable en x (et si $x = 0$, la dérivabilité à droite équivaut à la dérivabilité en 0, puisque 0 est le bord gauche du domaine de définition de g). Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{f_t'(x)}{1 + t^2} dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

3. (a) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la fonction $k : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est une primitive de e^{-t^2} sur $\mathbb{R}_+$ (plus précisément la primitive s'annulant en 0). Par conséquent, k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k'(x) = e^{-x^2}.$$

Ainsi, la fonction h , obtenu comme le carré de k , est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = 2k'(x)k(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

En effectuant le changement affine (donc de classe $\mathcal{C}^1$) $t = ux$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-u^2 x^2} x \, du = 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+u^2)} \, du = -g'(x),$$

puisque la variable d'intégration est une variable muette. L'égalité est aussi clairement vérifiée pour $x = 0$ (en repartant de l'expression initiale de h'), donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) + g'(x) = 0}$$

(b) Par conséquent, la fonction $h + g$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) + g(x) = h(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}}.$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2},$$

donc

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} \, dt = e^{-x^2}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$, on obtient, d'après le théorème d'encadrement, l'existence de la limite de g en $+\infty$, et

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}.$$

De la relation précédente, on a alors l'existence de la limite de h en $+\infty$, et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Or, par positivité des intégrales considérées, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x e^{-t^2} \, dt = \sqrt{h(x)},$$

donc, par continuité de la racine en 0, en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient l'existence de la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x e^{-t^2} \, dt$, donc la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ (que l'on peut bien sûr obtenir par des techniques beaucoup plus élémentaires), et la valeur de cette limite :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Correction de l'exercice 4 – (d'après EDHEC 2004)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc l'intégrale n'a qu'une interprétation, en $+\infty$.

De plus, au voisinage de $+\infty$ on a l'équivalent suivant pour h_x :

- Si $x > 0$, alors $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$, et comme $x+1 > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ est convergente. Les deux fonctions étant positives sur $[1, +\infty[$, on en déduit, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives par équivalences, que l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente.
- Si $x < 0$, alors $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente. On conclut de même, par comparaison, que l'intégrale définissant $f(x)$ est divergente.
- Si $x = 0$, alors $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t}$. On conclut de même que l'intégrale définissant $f(x)$ est divergente.

Ainsi, $f(x)$ est définie si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}_+^*}$.

2. Soit $0 < x \leq y$. On a alors, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$t^{x+1} \leq t^{y+1},$$

par croissance de la fonction puissance d'un nombre supérieur à 1 (croissance de $x \mapsto e^{x \ln t}$, du fait que $\ln t \geq 0$)

Ainsi, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$0 < 1 + t + t^{x+1} \leq 1 + t + t^{y+1} \quad \text{donc:} \quad \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} \geq \frac{1}{1 + t + t^{y+1}}.$$

Par la propriété de croissance de l'intégrale on en déduit que $f(x) \geq f(y)$.

Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. C'est un calcul classique, consistant à faire une mise sous forme canonique :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 1 + t + t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\right).$$

Ainsi, en posant le changement de variables $u = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{\sqrt{3}} = \varphi(t)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, croissante, et bijective de $[1, +\infty[$ sur $[\sqrt{3}, +\infty[$, on en déduit que :

$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \text{Arctan } u - \text{Arctan } \sqrt{3} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right),$$

Donc $f(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

4. (a) Soit $x > 0$. Alors $t \mapsto \frac{1}{t(1+t^x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale possède une seule impropriété en $+\infty$. De plus, puisque $x > 0$, $1 = o(t^x)$, d'où

$$\frac{1}{t(1+t^x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}},$$

et comme dans la question 1, on en déduit que $g(x)$ est bien définie.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1+t^x - t^x}{t(1+t^x)} = \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

Ainsi,

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} dt.$$

Attention, on ne peut pas séparer cette intégrale en deux directement sur les intégrales impropres, car les deux intégrales obtenues divergent. On restreint donc l'intervalle d'intégration. Soit $A > 1$.

$$\int_1^A \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} dt = \left[\ln t \right]_1^A - \frac{1}{x} \left[\ln(1+t^x) \right]_1^A = \ln(A) - \frac{\ln(1+A^x)}{x} + \frac{\ln 2}{x} = \frac{1}{x} \left(\ln \frac{A^x}{1+A^x} \right) + \frac{\ln 2}{x}.$$

Ainsi, le premier terme étant de limite nulle lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$

(c) La fonction qu'on intègre pour définir f étant positive sur l'intervalle d'intégration, on a, par la propriété de positivité de l'intégrale, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 0$.

De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$1 + t + t^{x+1} \geq t + t^{x+1} = t(1+t^x) \quad \text{donc:} \quad \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} \leq \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

Par la propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit donc que $f(x) \leq g(x) = \frac{\ln 2}{x}$.

D'après le théorème d'existence de limites par encadrement, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$, on en déduit que f admet une limite en $+\infty$, et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

5. (a) D'après la question précédente, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x)$. De plus, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \frac{1}{t(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}} = \frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})(t+t^{x+1})} = \frac{1}{(1+t+t^{x+1})(t+t^{x+1})} \leq \frac{1}{t^{2x+2}}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, les intégrales étant convergentes,

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \right) dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x+2}} dt = \frac{1}{2x+1}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\frac{\ln 2}{x} - f(x) = g(x) - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}.}$$

- (b) Ainsi, puisque $\frac{1}{2x+1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{\ln 2}{x} - f(x)$ reste borné au voisinage de $+\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$, on en déduit que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = o\left(\frac{\ln 2}{x}\right) \quad \text{soit:} \quad f(x) = \frac{\ln 2}{x} + o\left(\frac{\ln 2}{x}\right)$$

Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{x}}$, et par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0.}$$

6. Je vous laisse faire.

7. (a) Soit $t \geq 1$. La fonction $x \mapsto t^{x+1} = e^{(x+1)\ln t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, par les propriétés de sommes et quotients de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, le dénominateur ne s'annulant pas, la fonction g_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{g'_t(x) = -\frac{(\ln t)e^{(x+1)\ln t}}{(1+t+e^{(x+1)\ln t})^2}}$$

puis

$$\begin{aligned} g''_t(x) &= -\frac{(\ln t)^2 e^{(x+1)\ln t} (1+t+t^{x+1})^2 - 2(\ln t)^2 e^{2(x+1)\ln t} (1+t+t^{x+1})}{(1+t+t^{x+1})^4} \\ &= \frac{(\ln t)^2 (t^{x+1}(1+t+t^{x+1}) - 2t^{2x+2})}{(1+t+t^{x+1})^3} = \boxed{-\frac{(\ln t)^2 t^{x+1} (1+t-t^{x+1})}{(1+t+t^{x+1})^3} = g''_t(x).} \end{aligned}$$

- (b) Or, pour tout $t \geq 1$, et tout $y > 0$, $0 \leq t^{y+1} \leq 1+t+t^{y+1}$ et $0 \leq |1+t-t^{y+1}| \leq |1+t|+|t^{y+1}| = 1+t+t^{y+1}$, donc

$$|t^{y+1}(1+t-t^{y+1})| \leq (1+t+t^{y+1})^2.$$

On en déduit que pour tout $t \geq 1$, et tout y dans $\mathbb{R}_+^*$,

$$|g''_t(y)| = \frac{(\ln t)^2 t^{y+1} |1+t-t^{y+1}|}{(1+t+t^{y+1})^3} \leq \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^{y+1}}.$$

Si de plus, $y \in]x-|h|, x+|h|$, on en déduit que $y \geq x-|h| \geq \frac{x}{2}$ (vu la contrainte sur h), donc, pour tout valeur de t supérieure à 1, on a

$$t^{y+1} \geq t^{\frac{x}{2}+1},$$

et donc

$$\boxed{|g''_t(y)| \leq \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}}$$

- (c) D'après l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 1 pour la fonction g_t de classe $\mathcal{C}^2$, entre x et $x+h$, l'expression précédente étant un majorant (indépendant de y , mais pouvant dépendre de x et h) de g_t'' entre x et $x+h$, on en déduit que

$$|g_t(x+h) - g_t(x) - hg'_t(x)| \leq \frac{h^2 \ln^2 t}{2(1+t+t^{\frac{x}{2}+1})},$$

d'où, en divisant par $|h| \neq 0$ (hypothèse à rajouter),

$$\left| \frac{g_t(x+h) - g_t(x)}{h} - g'_t(x) \right| \leq \frac{|h| \ln^2 t}{2(1+t+t^{\frac{x}{2}+1})}.$$

- (d) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc l'intégrale admet une unique impropreté en $+\infty$. De plus,

$$\frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1}}.$$

Or, $\frac{x}{2} + 1 > 1$. Il existe donc α tel que $1 < \alpha < \frac{x}{2} + 1$. Alors pour tout $t \geq 1$,

$$t^\alpha \frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1}} = \frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1-\alpha}},$$

et comme $\frac{x}{2} + 1 - \alpha > 0$, d'après les croissances comparées, cette expression est de limite nulle en $+\infty$. Ainsi, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1}} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),$$

et d'après l'équivalent ci-dessus, on obtient alors :

$$\frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Les fonctions étant positives, et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ étant convergente, puisque $\alpha > 1$, on

en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} dt$ est convergente.

On a alors, d'après l'inégalité triangulaire et la majoration de la question c,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_1^{+\infty} g'_t(x) dt \right| &= \left| \int_1^{+\infty} \left(\frac{g_t(x+h) - g_t(x)}{h} - g'_t(x) \right) dt \right| \\ &\leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{g_t(x+h) - g_t(x)}{h} - g'_t(x) \right| dt \\ &\leq \frac{|h|}{2} \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est convergente, et ne dépend pas de h . Donc la limite de ce majorant lorsque h tend vers 0 est égale à 0 (à x fixé). Ainsi, le taux d'accroissement en x de f admet une limite lorsque x tend vers 0, d'où la dérivabilité de f en x , et

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_1^{+\infty} g'_t(x) dt.}$$

Ceci est vrai pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 6 –

1. Soit S une primitive de s , et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = S(t+T) - S(t)$. Alors g est dérivable (puisque S l'est), et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = S'(t+T) - S'(t) = s(t+T) - s(t) = 0.$$

Ainsi, $\mathbb{R}$ étant un intervalle, g est constante. De plus,

$$g(0) = S(T) - S(0) = \int_0^T s(t) dt = 0.$$

Ainsi, la fonction g est nulle, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t+T) = S(t)$, dont S est T -périodique.

La fonction S étant continue sur $[0, T]$, intervalle fermé borné, elle est bornée sur cet intervalle, donc aussi sur $\mathbb{R}$, puisque les valeurs prises sur $\mathbb{R}$, sont aussi celles prises sur $[0, T]$, par périodicité.

2. La fonction sf est continue sur $[1, +\infty[$. l'intégrale admet une seule impropreté en $+\infty$.

Les fonctions S et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, et vérifient $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)f(t) = 0$, puisque S est bornée et

f de limite nulle. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} s(t)f(t) dt$ est de même nature

que $\int_1^{+\infty} S(t)f'(t) dt$. Or, f' étant négative (puisque f décroît), et S étant bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad |S(t)f'(t)| \leq M|f'(t)| = -Mf'(t).$$

La fonction f étant une primitive de f' , et admettant une limite en $+\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f'(t) dt$ converge,

donc aussi $\int_1^{+\infty} -Mf'(t) dt$. D'après le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en

déduit que $\int_1^{+\infty} S(t)f'(t) dt$ converge absolument, donc converge. Ainsi, $\int_1^{+\infty} s(t)f(t) dt$ converge.

Correction de l'exercice 8 – Pour tout réels x et y , on pose

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

1. (a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$. Donc il peut y avoir deux impropretés en 0 et en 1.

- Étude en 0. On a, au voisinage de 0 :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}.$$

Les fonctions étant positives, l'intégrale définissant $B(x, y)$ et $\int_0^1 t^{x-1} dt$ sont de même nature en la borne 0. Or cette dernière intégrale est convergente si et seulement si $1-x < 1$, donc si $x > 0$, en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $1-x$ en 0. Ainsi, l'intégrale définissant $B(x, y)$ converge en la borne 0 si et seulement si $x > 0$.

- Étude en 1. De même :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1},$$

et l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^{y-1} dt$ converge (pour sa seule borne impropre 1) si et seulement si $y > 0$ (il s'agit encore une fois d'une intégrale de Riemann, en 1 cette fois). Donc l'intégrale définissant $B(x, y)$ converge en la borne 1 si et seulement si $y > 0$.

Ainsi, le domaine de définition de B est $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- (b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Effectuons le changement de variables $u = 1-t$ dans $B(x, y)$, donc $t = 1-u = \varphi(u)$, donc $dt = -du$. La fonction φ est bijective de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante. Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 (1-u)^{x-1}(1-(1+u))^{y-1}(-du)$$

sont de même nature, donc convergentes, et :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = - \int_0^1 (1-u)^{x-1}(1-(1+u))^{y-1}(-du) = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1} du.$$

Ainsi, on obtient bien : $B(x, y) = B(y, x)$.

- (c) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$B(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt.$$

Effectuons une intégration par parties sur cette intégrale, en posant les fonctions u et v définies par :

$$\forall t \in]0, 1[, \quad u(t) = t^x \quad \text{et} \quad v(t) = -\frac{(1-t)^y}{y}.$$

Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, et

$$\forall t \in]0, 1[, \quad u'(t) = xt^{x-1} \quad \text{et} \quad v'(t) = (1-t)^y.$$

De plus, puisque $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} u(t)v(t) = 0.$$

Ainsi, ces limites existant dans $\mathbb{R}$, le théorème d'intégration par parties permet d'affirmer que les intégrales $\int_0^1 u'v$ et $\int_0^1 uv'$ sont de même nature, donc convergentes, et que

$$\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt = \lim_{t \rightarrow 1^-} u(t)v(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) - \int_0^1 -xt^{x-1} \cdot \frac{(1-t)^y}{y} dt = \frac{x}{y}B(x, y+1).$$

Donc $yB(x+1, y) = xB(x, y+1)$.

Or, on a :

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt,$$

ces intégrales étant convergentes. Ainsi :

$$B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y).$$

On obtient donc la relation suivante :

$$yB(x+1, y) = xB(x, y) - xB(x+1, y) \quad \text{donc:} \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y}B(x, y).$$

(d) On commence par $n = 0$. On obtient :

$$B(1, y) = \int_0^1 t^0(1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \left[-\frac{(1-t)^y}{y} \right]_0^1 = \frac{1}{y}.$$

Alors, par itération de la formule trouvée dans la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B(n+1, y) = \frac{n}{n+y} \cdot \frac{n-1}{n-1+y} \cdots \frac{1}{1+y} B(1, y) = \frac{n!}{y \prod_{k=1}^n (k+y)}$$

et, en voyant le terme y comme le terme correspondant à $k = 0$ dans le produit, il vient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B(n+1, y) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (k+y)}.$$

Ce produit ne se simplifie pas davantage.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) La dérivée seconde de $f : t \mapsto e^{-t}$ est $f'' : t \mapsto e^{-t}$. Donc f'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc f est convexe. Ainsi, la courbe de f est au-dessous de ses tangentes, notamment de sa tangente en 0. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t} \geq f'(0)t + f(0) = -t + 1.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, n]$, $(1 - \frac{t}{n}) \leq e^{-\frac{t}{n}}$. Or puisque $t \in [0, n]$, ces quantités sont positives, donc en élevant à la puissance n , par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

(b) • **Première méthode : En distinguant suivant que $t \in [0, \sqrt{n}[$ et $t \in [\sqrt{n}, n]$**

* Si $t \in [\sqrt{n}, n]$, l'inégalité est évidente, car $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq 0$.

* Si $t \in [0, \sqrt{n}[$, les deux quantités à comparer sont strictement positives, donc, par croissance du $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer l'inégalité obtenue en appliquant le logarithme, à savoir :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t \leq n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

On pose g la fonction définie sur $[0, \sqrt{n}[$ par :

$$g(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Cette fonction est dérivable sur $[0, \sqrt{n}[$, et

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad g'(t) = \frac{-\frac{2}{n}t}{1 - \frac{t^2}{n}} - 1 + \frac{1}{1 - \frac{t}{n}}.$$

Après mise sur le même dénominateur, et après simplifications, on obtient :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad g'(t) = \frac{-\frac{t}{n} + \frac{2t^2}{n^2} - \frac{t^3}{n^2}}{\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\left(1 - \frac{t}{n}\right)} = \frac{-t(t^2 - 2t + n)}{(n - t^2)(n - t)}.$$

Or, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$,

$$t^2 - 2t + n = (t - 1)^2 + (n - 1) \geq 0,$$

puisque $n \geq 1$. Ainsi, puisque par ailleurs $t \leq \sqrt{n}$ (donc le dénominateur est positif), on obtient, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $g'(t) \leq 0$.

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $[0, \sqrt{n}[$, donc

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad g(t) \leq g(0) = 0.$$

On obtient bien : $\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t \leq n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)$. On trouve l'inégalité recherchée en appliquant l'exponentielle, qui est croissante.

Ainsi, pour tout $t \in [0, n]$, on a : $\boxed{\left(1 - n \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}$.

• **Deuxième méthode : par la convexité de $x \mapsto (1 - x)^n$.**

Tout d'abord, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $(1 - x)^n \geq 1 - nx$. Encore une fois, il s'agit d'une inégalité de convexité. En posant $h : x \mapsto (1 - x)^n$, on obtient, si $n \geq 2$, pour tout $x \in [0, 1]$, $h'(x) = -n(1 - x)^{n-1}$ et $h''(x) = n(n-1)(1 - x)^{n-2} \geq 0$. Si $n = 1$, $h'' = 0 \geq 0$. Ainsi, dans tous les cas, h est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (1 - x)^n \geq f'(0)x + f(0) = -nx + 1.$$

(cela peut être vu aussi comme une utilisation de l'inégalité de Taylo-Lagrange)

Par ailleurs, un argument similaire à ci-dessus permet de montrer que pour tout $t \geq 0$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t.$$

(en fait, l'argument donné en 2(a) est aussi valable pour toutes les valeurs négatives de t)

On en déduit que pour tout $t \in [0, n]$, puisque $\frac{t}{n} \in [0, 1]$:

$$\left(1 - n \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) e^{-t} \leq \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t e^{-t},$$

et donc enfin

$$\boxed{\left(1 - n \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}$$

(c) Soit $x > 0$; On en déduit que pour tout $t \in [0, n]$,

$$\left(1 - n \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t},$$

donc, puisque $t^{x-1} \geq 0$,

$$\left(1 - n \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) e^{-t} t^{x-1} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1}.$$

donc :

$$e^{-t} t^{x-1} - \frac{1}{n} e^{-t} t^{x+1} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et n , on obtient, par positivité de l'intégrale (les intégrales étant convergentes en 0 d'après les propriétés de convergence des intégrales Γ)

$$\int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt - \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt = \Gamma(x+2)$.

Ainsi, d'après les règles usuelles sur les limites, le majorant et le minorant convergent tous deux vers $\Gamma(x)$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, le terme intermédiaire admet une limite, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

(d) Effectuons le changement de variables $u = \frac{t}{n}$, donc $t = nu = \varphi(u)$. La fonction φ est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, n]$, strictement croissante, et de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, les intégrales étant convergentes, on a :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x B(n+1, x).$$

On déduit alors de la question 1(d) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \cdot \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (k+x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

3. (a) D'après ce qui précède,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^y B(n+1, y) = \Gamma(y) \neq 0, \quad \text{donc:} \quad n^y B(n+1, y) \underset{+\infty}{\sim} \Gamma(y), \quad \text{donc:} \quad B(n+1, y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}.$$

(b) Comme $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto t^x$ est décroissante. Donc, à y fixé, par propriété de croissance de l'intégrale, la fonction B est décroissante en sa première variable. Ainsi, pour tout $x > 1$,

$$B(\lfloor x \rfloor + 1, y) \leq B(x, y) \leq B(\lfloor x \rfloor, y)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Or, $x \underset{+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$ et $x \underset{+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor + 1$, donc y étant fixe,

$$\lfloor x \rfloor^y \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^y \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (\lfloor x \rfloor + 1)^y.$$

Ainsi,

$$B(\lfloor x \rfloor, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} B(\lfloor x \rfloor + 1, y).$$

Or, l'encadrement précédent amène, pour tout $x > 1$,

$$\frac{B(\lfloor x \rfloor + 1, y)}{\Gamma(y)/x^y} \leq \frac{B(x, y)}{\Gamma(y)/x^y} \leq \frac{B(\lfloor x \rfloor, y)}{\Gamma(y)/x^y}.$$

D'après ce qui précède, les termes encadrant admettent 1 pour limite, donc aussi le terme central. Donc

$$B(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}.$$

(c) Par itération de la question 1(c), on obtient dans un premier temps que

$$B(x+n, y) = \frac{x+n-1}{x+y+n-1} B(x+n-1, y) = \cdots = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+y+k)} B(x, y)$$

Ainsi, d'après la question 2,

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{x+y} n!}{n^x n!} \cdot \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{\prod_{k=0}^n (x+y+k)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^y B(x+n, y)}{B(x, y)} \cdot \frac{x+n}{x+y+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^y B(x+n, y)}{B(x, y)}.$$

Or, $B(x+n, y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$, donc, en remplaçant dans l'équivalent précédent : $\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{B(x, y)}$.

Comme ces expressions ne dépendent plus de n (sur lequel porte l'équivalent), cet équivalent est en fait une égalité (égalité des limites) On en déduit donc :

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(y)}{B(x, y)} \quad \text{soit:} \quad \boxed{B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}.$$