DM n° 1 : Révisions de première année

Correction du problème 1 – (EDHEC 2005)

Partie I – Étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1. (a) **Mise en garde :** Attention, les lancers sont mutuellement indépendants une fois le jeton choisi, mais pas dans l'absolu, avant choix du jeton. En effet, intuitivement, la connaissance des résultats précédents influe beaucoup sur la probabilité des lancers suivants. Par exemple, si on a obtenu beaucoup de 1 successifs, la probabilité qu'on ait tiré avec le jeton 2 est forte, donc il est très fortement probable qu'on tire encore un 1, alors que si on a tiré au moins un zéro avant, on sait qu'on a tiré avec je jeton 1, et donc que la probabilité d'obtenir un 1 n'est que de $\frac{1}{2}$. Cette dépendance vis-à-vis des résultats antérieurs montre bien que les tirages ne sont pas indépendants.

   En revanche, une fois le jeton choisi, les tirages sont clairement indépendants (on est dans le schéma classique d'une succession de tirages à Pile ou Face avec une pièce donnée).

   Remarquez que l'indépendance (mutuelle) d'événements est une notion reliée à une probabilité, c'est-à-dire définie sur un espace probabilisé (et non seulement probabilisable). En effet, la définition de l'indépendance ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$) fait intervenir la mesure de probabilité. La remarque précédente signifie que les événements U_k sont mutuellement indépendants pour les mesures de probabilité conditionnelle P_E et $P_{\overline{E}}$, mais ne sont pas mutuellement indépendants pour la mesure de probabilité totale P.

   Soit A_n l'événement consistant à n'obtenir que des faces portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Ainsi, $A_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$.

   Pour exploiter l'indépendance des tirages, il faut donc se placer au niveau des probabilités conditionnelles. Ainsi, on utilise la formule des probabilités totales sur le système complet $(E, \overline{E})$, ces deux événements étant de probabilité non nulle :

$$P(A_n) = P(E)P_E\left(\bigcap_{k=1}^{n} U_k\right) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}\left(\bigcap_{k=1}^{n} U_k\right)$$

   Les lancers étant mutuellement indépendants après choix du jeton, on obtient :

$$P(A_n) = P(E)\prod_{k=1}^{n} P_E(U_k) + P(\overline{E})\prod_{k=1}^{n} P_{\overline{E}}(U_k).$$

   Or, on a $P(E) = P(\overline{E}) = \frac{1}{2}$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_E(U_k) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{E}}(U_k) = 1$. Donc :

$$P(A_n) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}.$$

   (b) On a :

$$P_{A_n}(E) = \frac{P(E \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(E)P_E(A_n)}{P(A_n)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + 2^n},$$

   les différents tirages étant indépendants après choix du jeton.

   La limite de cette probabilité est 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Si on n'obtient pendant longtemps que des 1, c'est que selon toute probabilité, on a tiré avec le jeton n'ayant que des faces 1 : si on tire avec le jeton 1, la probabilité de n'avoir que des 1 dans une succession infinie est nulle.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On discute suivant l'événement E. La loi de la variable X conditionnée à E est la loi du temps d'attente d'une face donnée, donc d'un succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes, de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, il s'agit de la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$P(X = n \mid E) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus, si $\overline{E}$ est réalisé, on ne tire jamais la face 0, donc :

$$P(X = n \mid \overline{E}) = 0.$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet $(E, \overline{E})$, on obtient :

$$P(X = n) = P(E)P(X = n \mid E) + P(\overline{E})P(X = n \mid \overline{E}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

(b) L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si aucun des événements $[X = n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, n'est réalisé. Ainsi :

$$[X = 0] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{[X = n]} = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X = n]}.$$

Par conséquent, les événements $[X = n]$, $n \in \mathbb{N}$ étant deux à deux incompatibles et en nombre dénombrable, on obtient, par complémentation et σ-additivité :

$$P(X = 0) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X = n]\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ce résultat était prévisible : il correspond à la probabilité de tirer le jeton 2 : dans ce cas, l'événement $[X = 0]$ est réalisé de manière certaine, alors qu'en cas contraire, il est presque-impossible.

Une autre façon de faire ce calcul est de constater que $[X = 0] = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Il s'agit d'une intersection d'une suite décroissante d'événements, donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$P(X = 0) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = \frac{1}{2}.$$

(c) **N'oubliez pas de justifier l'absolue convergence pour l'existence de l'espérance !!!**

La série définissant l'espérance est de terme général $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, pour $n \geqslant 1$ (le terme initial ne modifie pas les propriétés de convergence) donc de terme général $\frac{1}{4} \cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Il s'agit du terme général d'une série du binôme négatif, de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc **absolument** convergente. Ainsi, l'espérance existe, et :

$$E(X) = 0P(X = 0) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

C'est logique : si on tirait avec la pièce 1, on aurait en moyenne besoin de 2 coups (espérance d'une loi géométrique), mais comme on a une chance sur deux de tirer avec la pièce 2, et donc d'obtenir $X = 0$, l'espérance est divisée par 2.

Le résultat peut d'ailleurs se retrouver de cette manière presque snas calcul, en utilisant la formule de l'espérance totale : $E(X \mid E) = 2$ d'après l'expression de l'espérance d'une loi géométrique, et $E(X \mid \overline{E}) = 0$, car on ne tire dans ce cas que des 1. De plus, l'existence de ces espérances conditionnelles de X équivaut à l'existence des espérances conditionnelles de $|X|$, par définition, et comme le système complet $(E = E_1, \overline{E} = E_2)$ est fini, on a bien entendu convergence de la somme $\sum\limits_{k=1}^{2} P(E_k)E(|X| \mid E_k)$.

Ainsi, on obtient l'existence de $E(X)$ par le théorème de l'espérance totale, et

$$E(X) = P(E)E(X \mid E) + P(\overline{E})E(X \mid \overline{E}) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1.$$

Vous remarquerez que dans un cas où les calculs sont si simples à faire, on ne gagne pas grand chose à l'utilisation de la formule de l'espérance totale : on gagne en nombre de calculs, mais on perd en temps de justification, les justifications à donner pour l'utilisation de cette formule étant un peu délicates. Il est bon de savoir appliquer cette méthode, mais elle est peut-être à réserver à des cas où les calculs sont un peu plus compliqués.

(d) La série définissant $E(X(X-1))$ est de terme général $n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, d'après le théorème de transfert. Ainsi, à un coefficient $\frac{1}{8}$ près, on se retrouve de nouveau avec une série du binôme négatif, donc absolument convergente. Ainsi, $E(X(X-1))$ existe, et

$$E(X(X-1)) = 0\cdot(-1)P(X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 2.$$

Ainsi, X admet une variance, et, d'après la formule de König-Huyghens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 2 + 1 - 1^2 = 2.$$

3. (a) On fait de même que pour X, en utilisant la formule des probabilités totales, et en remarquant que :
   - si E est réalisé, il s'agit à nouveau du temps d'attente d'un premier succès, donc d'une loi géométrique ;
   - sinon, l'événement $[Y=1]$ est réalisé de manière certaine.

   Ainsi, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(E\overline{E})$, pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(Y=n) = P(E)P(Y=n \mid E) + P(\overline{E})P(Y=n \mid \overline{E}).$$

   Ainsi,
   - si $n=1$, $P(Y=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$;
   - si $n \geqslant 2$, $P(Y=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

(b) Comme pour X, on a :

$$P(Y=0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 0.$$

(c) À partir du rang $n=2$, le terme général de la série déterminant $E(Y)$ est $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, comme pour X. Ainsi, à nouveau, il s'agit d'une série du binôme négatif, donc absolument convergente. Ainsi, Y admet une espérance, et

$$E(Y) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Encore une fois c'est logique : dans un cas l'espérance est 2, dans l'autre elle est 1. Comme les deux cas sont équiprobables, l'espérance finale est la moyenne des 2 donc $\frac{3}{2}$. Encore une fois, on aurait pu faire les calculs avec la formule de l'espérance totale : comme précédemment $E(Y \mid E) = 2$, et $E(Y \mid \overline{E}) = 1$, car on tire forcément le premier 1 au premier tirage dans ce cas. Ainsi, les conditions de convergence étant assurées comme précédemment par le fait que le système complet est fini, on obtient l'existence de $E(Y)$, et

$$E(Y) = P(E)E(Y \mid E) + P(\overline{E})E(Y \mid \overline{E}) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}.$$

(d) Le terme général, à partir du rang 2, de la série calculant $E(Y(Y-1))$ d'après le théorème de transfert est le même que celui pour $E(X(X-1))$, ce qui nous assure de la convergence absolue de cette série, donc de l'existence de $E(Y(Y-1))$. De plus :

$$E(Y(Y-1)) = 1(1-0)\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 2.$$

On obtient alors, d'après la formule de König Huyghens, l'existence de $V(Y)$, et :

$$V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2 = 2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}.$$

4. (a) Si X et Y sont tous les deux non nuls, S correspond au premier tirage tel que le 1 et le 0 soient apparus. Comme ils ne peuvent pas apparaître en même temps S prend des valeurs supérieures ou égales à 2.

   Si $X = 0$, alors on n'a tiré que des 1, donc Y vaut 1. Ainsi, S prend la valeur 1.

   De même si $Y = 0$.

   Ainsi, $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   (b) D'après ce qui précède, l'événement $[S = 1]$ est réalisé si et seulement si $[X = 0]$ est réalisé ou $[Y = 0]$ est réalisé. Ainsi :

$$[S = 1] = [X = 0] \cup [Y = 0].$$

   Par ailleurs, ces deux événements sont incompatibles, car on ne peut pas à la fois ne jamais tirer 0 et ne jamais tirer 1, puisque ce sont les deux seules possibilités ! Ainsi, par additivité,

$$P(S = 1) = P(X = 0) + P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

   (c) Soit $n \geqslant 2$.

   - Si $[X = n]$ est réalisé, alors tous les tirages précédents ont amené un 1, en particulier le premier. Donc $[Y = 1]$ est réalisé, et en particulier $[Y < n]$ est réalisé. Ainsi, $[X = n] \subset [Y < n]$; la réciproque n'a aucune raison d'être vraie.
   - De même, on obtient $[Y = n] \subset [X < n]$.
   - Si $[S = n]$ est réalisé, alors le maximum de X et Y est n, donc soit X soit Y a pris la valeur n. Ainsi, $[X = n] \cup [Y = n]$ est réalisé. Par conséquent, $[S = n] \subset [X = n] \cup [Y = n]$.
   - Si $[X = n] \cup [Y = n]$ est réalisé, supposons que ce soit $[X = n]$ qui est réalisé. Alors d'après ce qui précède, $[Y < n]$ est réalisé, donc n est le maximum des deux valeurs prises par X et Y. Donc $[S = n]$ est réalisé. De même bien entendu si $[Y = n]$ est réalisé. Ainsi, $[X = n] \cup [Y = n] \subset [S = n]$.
   - Les deux inclusions amènent l'égalité $[S = n] = [X = n] \cup [Y = n]$.

   (d) Les événements $[X = n]$ et $[Y = n]$ sont incompatibles (car cela nécessiterait qu'on tire à la fois 0 et 1 au n-ième tirage). Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$P(S = n) = P(X = n) + P(Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

   Comme $P(S = 1) = \frac{1}{2}$, on reconnaît l'expression d'une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, $E(S) = 2$ et $V(S) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$.

5. (a) • Si X ou Y prend la valeur 0, alors I aussi.

   - Sinon, X et Y prennent toutes deux des valeurs strictement positives. L'un des deux au moins prend la valeur 1, car on tire forcément soit un 1 soit un 2 lors du premier tirage. Ainsi, I prend nécessairement la valeur 1.

   Ainsi, $I(\Omega) = \{0, 1\}$, donc I est une variable de Bernoulli.

   (b) D'après ce qui précède, l'événement $[I = 0]$ est réalisé si et seulement si $[X = 0]$ est réalisé ou $[Y = 0]$ est réalisé. Ainsi,

$$[I = 0] = [X = 0] \cup [Y = 0] = [S = 1]$$

   Ainsi, $P(I = 0) = P(S = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, I suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit que :

$$E(I) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Partie II – Simulation des variables X et Y

1. (a) La variable X est le rang du lancer en cours. Initialement, X est nul (avant d'avoir tiré).

   On commence par déterminer le jeton avec lequel on joue (1 ou 2 : ce sont les valeurs possibles, prises avec équiprobabilités, par la variable jeton)

Si on a choisi le jeton 1, on effectue des tirages successifs (c'est la boucle) : à chaque tirage, on obtient de manière équiprobable 0 ou 1 (c'est le random(2) dans la boucle). Si on obtient 1, on continue, si on obtient 0, on s'arrête. Comme à chaque tirage, on incrémente X, la valeur finale de X est le rang du tirage auquel on a obtenu pour la première fois un 1. Si la variable jeton a pris la valeur 2, on ne fait rien : dans ce cas, la valeur de sortie de X est la valeur initiale 0, ce qui correspond au fait que dans ce cas, on ne peut jamais tirer 0.

Ainsi, la valeur affichée à la fin est la valeur simulée du nombre de tirages nécessaire pour obtenir le premier 0, cette valeur étant 0 si on a tiré le jeton 2.

Vous remarquerez que le begin ... end dans la structure conditionnelle est inutile ici... Le concepteur du sujet se complique la vie...

(b) Le nombre de passages dans la boucle peut ne pas être fini, si on a tiré la pièce 1, mais que néanmoins on obtient toujours des 1. Mais cette situation est presque-impossible. Donc le programme s'arrête presque-sûrement.

2. On copie le programme précédent, en remarquant que si on tire avec le jeton 2, cette fois, on est sûr d'obtenir un 1 au premier tirage, donc Y prend la valeur 1.

```
Program Edhec2005Y;
Var jeton, lancer, Y:integer;
Begin
  Randomize;
  Y:=0;
  jeton:=random(2)+1;
  if jeton=1 then
      repeat
        Y:=Y+1;
        lancer:= random(2);
      until
        lancer=1
   else
     Y:=1;
  writeln(Y);
end.
```

Correction du problème 2 – Exponentielles et logarithmes de matrices (conception : A. Troesch)

Partie I – Premier exemple

1. (a) $A^0 = I_4$, $A^1 = A$, et :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = 0, \qquad \text{puis, pour tout } n \geqslant 4,\ A^n = 0.$$

(b) Ainsi, la somme $\sum \frac{A^n}{n!}$ est une somme finie, donc forcément convergente. Par conséquent, $\exp(A)$ existe, et :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{3} \frac{A^n}{n!} = I_4 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) De la même façon, $\exp(-A)$ existe, et :

$$\exp(-A) = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-A)^n}{n!} = I_4 - A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{6}A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Le produit de $\exp(A)$ et $\exp(-A)$ donne :

$$\exp(A) \cdot \exp(-A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

Ainsi, $\exp(-A)$ est l'inverse de $\exp(A)$. Ce n'est pas étonnant puisque une telle propriété provient pour les réels d'une étude complètement formelle des séries. La convergence des séries suffit à justifier une telle propriété. Ici, la convergence ne pose pas de problème, puisque les sommes sont finies.

(e) Soit $C = \exp(A) - I_4$. Alors :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall n \geqslant 4,\ C^n = 0.$$

(f) Donc la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}C^n}{n}$ est finie, donc convergente, ce qui équivaut à l'existence de $\ln(\exp(A))$. Alors :

$$\ln(\exp(A)) = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}C^n}{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Encore une fois, ce résultat n'est pas étonnant puisque là encore, ce résultat complètement formel découle de l'étude des séries.

2. (a) Soit f l'application canoniquement associée à A, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Alors $f(e_1) = 0$, et pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $f(e_i) = ae_{i-1}$. Par conséquent, en itérant f, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$,

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ f^k(e_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![k+1, p]\!],\ f^k(e_i) = a^k e_{i-k}.$$

On en déduit que : $A^k = [f^k] = a^k \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, il s'agit de la matrice constitué de a^k sur la k-ième diagonale au dessus de la diagonale principale, et de 0 ailleurs.

De même, si $k \geqslant p$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = 0$, donc $A^k = 0$.

(b) Par conséquent, la somme définissant $\exp(A)$ est finie, et donc convergente. Ainsi $\exp(A)$ existe, et :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1!} & \cdots & \frac{a^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a}{1!} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) De même, $\exp(-A)$ existe, et :

$$\exp(-A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-A)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{1!} & \cdots & \frac{(-a)^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{a}{1!} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le produit de $\exp(A)$ et $\exp(-A)$:

$$\exp(A)\exp(-A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-A)^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{2n-2} c_\ell A^\ell,$$

où pour tout $\ell \in [\![0, 2n-2]\!]$,

$$c_\ell = \sum_{\substack{i+j=\ell \\ i \in [\![0,n-1]\!] \\ j \in [\![1,n-1]\!]}} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{\ell!} \sum_{\substack{i+j=\ell \\ i \in [\![0,n-1]\!] \\ j \in [\![1,n-1]\!]}} \binom{\ell}{j} \cdot (-1)^j.$$

Pour $\ell < n$, la condition sur i et j est automatiquement vérifiée, et on trouve :

$$c_\ell = \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \cdot (-1)^j = \frac{1}{\ell!}(1-1)^\ell,$$

et par conséquent, $c_0 = 1$ et pour tout $\ell \in [\![1, n-1]\!]$, $c_\ell = 0$.
De plus, pour tout $\ell \geqslant n$, $A^\ell = 0$. Par conséquent :

$$\exp(A)\exp(-A) = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell A^\ell = A^0 = I_n.$$

Ainsi, $\exp(-A)$ est l'inverse de $\exp(A)$.

3. (a) $I_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversons le système $AX = Y$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Alors le système $AX = Y$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & -x_2 & & & = y_1 \\ & x_2 & -x_3 & & = y_2 \\ & & x_3 & -x_4 & = y_3 \\ & & & x_4 & = y_4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccl} x_1 & = & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ x_2 & = & y_2 + y_3 + y_4 \\ x_3 & = & y_3 + y_4 \\ x_4 & = & y_4 \end{array} \right.$$

Par conséquent, $I_4 - A$ est inversible, et $(I_4 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) D'après les valeurs de A^2, A^3 et A^n, $n \geqslant 4$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = I_4 + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (I_4 - A)^{-1}.$$

Ceci n'est pas étonnant, par analogie avec la formule $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On peut remarquer que :

$$(I_4 - A) \sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_4 - A) \sum_{k=0}^{3} A^k = I_4 - A^4 = I_4.$$

4. (a) A est nilpotente puisque pour tout $k \geqslant p$, $A^k = 0$. Ainsi $\sum A^k$ est une somme finie donc convergente. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & a^{p-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Il s'agit de l'inverse de $(I_p - A)$. En effet, on a une somme téléscopique :

$$(I_p - A) \sum_{k=0}^{n-1} A^k = I_n - A^n = I_n.$$

Ainsi, $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \sum_{n=0}^{p-1} A^n$.

Partie II – Deuxième exemple

On pose $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) $\det(P) = 3 \neq 0$, donc P est inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $PDP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = A.$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

(d) Le coefficient en position $(1,1)$ de la somme définissant $\exp(D)$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$. Cette somme converge, de somme e^{-2}.

Le coefficient en position $(2,2)$ de la somme définissant $\exp(D)$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$. Cette somme converge, de somme e^{-1}.

Les coefficients en position $(1,2)$ et $(2,1)$ sont nuls. Ainsi, les sommes sur chacun des coefficients convergent, donc $\exp(D)$ existe, et

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}.$$

(e) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{n} D^n \right) P^{-1}.$$

Or, multiplier par une matrice revient à faire une combinaison linéaire des coefficients. Comme on a convergence coefficient par coefficient de la somme $\sum D^n$, il en est donc de même, d'après les règles sur les limites, de $P \cdot \sum D^n$, puis de $P\left(\sum D^n\right)P^{-1}$. Par conséquent, la somme définissant $\exp(A)$ converge, et :

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}.$$

(f) Un calcul, qu'il faudrait préciser un peu, amène alors $\exp(A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-1} \\ \mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-2}+2\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$.

2. (a) On obtient de la même manière $\exp(-A) = P\exp(-D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^2+\mathrm{e} & 2\mathrm{e}^2-2\mathrm{e} \\ \mathrm{e}^2-\mathrm{e} & \mathrm{e}^2+2\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$.

   (b) Un calcul un peu fastidieux mais sans difficulté amène $\exp(A)\exp(-A) = I_2$. Encore une fois, la conclusion, très étonnante, est que $\exp(-A)$ est l'inverse de $\exp(A)$.

3. On note $B = \exp(A)$. Notre but est de déterminer $\ln(B) = \ln(\exp(A))$.

   (a) On a $B = \exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$, donc $B - I_2 = P(\exp D - I_2)P^{-1}$. Ainsi, il suffit de poser

$$D' = exp(D) - I_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2}-1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1}-1 \end{pmatrix}.$$

   (b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D'^n = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^{-2}-1)^n & 0 \\ 0 & (\mathrm{e}^{-1}-1)^n \end{pmatrix}$

   (c) Or, puisque $|\mathrm{e}^{-2}-1| < 1$ et $|\mathrm{e}^{-1}-1| < 1$, les séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(\mathrm{e}^{-2}-1)^n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(\mathrm{e}^{-1}-1)^n$ convergent, respectivement vers $\ln(\mathrm{e}^{-2}) = -2$ et $\ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1$. Par conséquent, $\ln(D'+I_2)$ existe, et

$$\ln(D'+I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

   (d) Comme plus haut, multiplier par une matrice ne change pas la convergence, donc la série définissant $\ln(B)$, obtenue en multipliant la série définissant $\ln(D'+I_2)$ par P à gauche et par P^{-1} à droite converge, d'où l'existence de $\ln(B)$, et comme précédemment,

$$\ln(\exp(A)) = \ln(B) = P\ln(D'+I_2)P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

   Cela n'a plus de quoi nous étonner.

Correction du problème 3 – (EML 2001)

1. (a) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: f_n est une application polynomiale.

   La fonction f_0 est la fonction constante égale à 1, il s'agit donc d'une fonction polynomiale (de degré 0). Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vrai

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors la fonction $t \mapsto f_n(t) + f_n(t^2)$ est une fonction polynomiale en tant que composée et somme de fonctions polynomiales. La fonction $x \mapsto \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))\ \mathrm{d}t$ est alors aussi une fonction polynomiale, en tant que primitive d'une fonction polynomiale. On en déduit que f_{n+1} est une fonction polynomiale, donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

   (b) • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f_0(t) + f_0(t^2))\ \mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x 2\ \mathrm{d}t = \boxed{1+x}.$$

- De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x ((1+t) + (1+t^2))\ \mathrm{d}t = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}}.$$

- On refait encore pareil ; pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + 1 + t^2 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6}\right)\ \mathrm{d}t = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{5}{24}x^3 + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{84}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I. On note :

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

(a) Les fonctions f_n et f_{n-1} sont continues, ainsi que la fonction valeur absolue. Donc $x \mapsto |f_n(x) - f_{n-1}(x)$ est continue sur l'intervalle fermé borné I, donc cette fonction est bornée, et atteint ses bornes. Autrement dit, $\boxed{\text{elle admet un maximum, qui est aussi sa borne supérieure.}}$

(b) • Calcul de D_1 : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_1(x) - f_0(x)| = |1 + x - 1| = |x|,$$

et par conséquent, $\boxed{D_1 = \frac{1}{2}}$

• Calcul de D_2 : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_2(x) - f_1(x)| = \left|\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{|x|^2}{4} + \frac{|x|^3}{6} \leqslant \frac{1}{2^2 4} + \frac{1}{2^3 6} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

Comme cette inégalité est une égalité pour la valeur $x = \frac{1}{2}$, on en déduit que la majorant est le maximum recherché : $\boxed{D_2 = \frac{1}{12}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in I$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))\ \mathrm{d}t - 1 - \frac{1}{2}\int_0^x (f_{n-1}(t) - f_{n-1}(t^2))\ \mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_0^x (f_n(t) - f_{n-1}(t))\ \mathrm{d}t + \int_0^x (f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2))\ \mathrm{d}t\right|.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, il vient alors :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_0^x f_n(t) - f_{n-1}(t)\right| + \frac{1}{2}\left|f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2)\right|.$$

Pour continuer les majorations on effectue la distinction de cas suggérée par l'énoncé, car pour pouvoir utiliser l'inégalité triangulaire pour les intégrales, il faut que les bornes soient données dans le bon sens.

• Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, alors

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^x |f_n(t) - f_{n-1}(t)|\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x |f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2)|\ \mathrm{d}t.$$

Comme $t^2 \in I$ lorsque $t \in [0, x] \subset I$, on en déduit la majoration :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^x D_n\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x D_n = xD_n \leqslant \frac{1}{2}D_n.$$

• Si $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$, alors :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_x^0 |f_n(t) - f_{n-1}(t)|\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_x^0 |f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2)|\ \mathrm{d}t,$$

et on déduit de même :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_x^0 D_n\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_x^0 D_n = -xD_n \leqslant \frac{1}{2}D_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I, \quad \boxed{|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} D_n}.$$

(d) L'inégalité précédente étant vraie poux tout $x \in I$, il vient :

$$\sup_{x \in I} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} D_n \qquad \text{donc:} \qquad D_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} D_n.$$

On montre alors l'inégalité attendue par récurrence.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $D_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est trivialement satisfaite, d'après la question 2(b).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit satisfait. Alors

$$D_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} D_n \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant D_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est convergente, en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} D_n \text{ converge.}}$

Étant donné x fixé, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant D_n.$$

On utilise une nouvelle fois le théorème de comparaison des séries à termes positifs, afin d'obtenir cette fois la convergence de la série de terme général $|f_n(x) - f_{n+1}(x)|$.

Ainsi, $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} (f_n(x) - f_{n+1}(x)) \text{ converge absolument, donc converge.}}$

3. Par télescopage de la somme partielle de la série précédente, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) - f_{k+1}(x) = f_1(x) - f_n(x) \qquad \text{donc:} \qquad f_n(x) = f_1(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) - f_{k+1}(x).$$

La convergence de la série de terme général $f_k(x) - f_{k+1}(x)$ nous assure l'existence de la limite de cette somme. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$|f_n(x)| = \left| 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant 1 + \frac{1}{2} \int_0^x |f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)| \, \mathrm{d}t,$$

d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales. L'inégalité triangulaire pour les réels amène alors :

$$|f_n(x)| \leqslant 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (|f_{n-1}(t)| + |f_{n-1}(t^2)|) \, \mathrm{d}t \leqslant 1 + \frac{1}{2} \int_0^x 2M_{n-1} \, \mathrm{d}t,$$

puisque $t^2 \in I$, pour toutes les valeurs de t considérées. Ainsi

$$|f_n(x)| \leqslant 1 + xM_{n-1} \leqslant 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$$

- De même, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, on obtient, par les mêmes majorations, en échangeant simplement les bornes de l'intégrale :

$$|f_n(x)| \leqslant 1 + \frac{1}{2}\int_x^0 2M_{n-1}\ \mathrm{d}t = 1 - xM_{n-1} \leqslant 1 + \frac{1}{2}M_{n-1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant 1 + \frac{1}{2}M_{n-1}$, donc

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| \leqslant 1 + \frac{1}{2}M_{n-1}, \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{M_n \leqslant 1 + \frac{1}{2}M_{n-1}}$$

(b) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $M_n \leqslant 2$.
Puisque f_0 est constant de valeur 1, $M_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifié. On a alors

$$M_{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2}M_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vérifié.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(c) L'inégalité est trivialement vérifiée lorsque $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable, et

$$\forall x \in I, \quad |f_n'(x)| = \frac{1}{2}\left|f_{n-1}(x) + f_{n-1}(x^2)\right| \leqslant \frac{1}{2}(|f_{n-1}(x)| + |f_{n-1}(x^2)|),$$

et on obtient donc

$$\forall x \in I, \quad |f_n'(x)| \leqslant M_{n-1} \leqslant 2.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, f étant dérivable sur I, on en déduit que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \boxed{|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2|x-y|}.$$

5. (a) Par continuité de la valeur absolue, et du fait de la convergence de la suite $(f_n(x))$ vers $f(x)$ pour tout $x \in I$, on déduit de l'inégalité précédente, par passage à la limite :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 2|x-y|.$$

(b) Soit $x \in I$. Alors $\lim\limits_{y \to x} 2|x-y| = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{y \to x} |f(x) - f(y)| = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$

Ainsi, f est continue en tout x de I, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$

6. (a) Par télescopage, puis d'après l'inégalité triangulaire, il vient, pour tout x de I :

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{p} (f_k(x) - f_{k-1}(x))\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|.$$

On utilise ensuite la définition de D_k et la majoration de D_k obtenue en 2(d) :

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} D_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}},$$

d'après la formule des sommes géométriques. On trouve bien, après simplification,

$$\boxed{|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)}.$$

(b) Par continuité de la valeur absolue, les deux termes de cette inégalité admettent une limite (à x et n fixés) lorsque p tend vers $+\infty$. D'après le théorème de prolongement des inégalités on obtient donc, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \lim_{p\to+\infty} f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| \leqslant \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right), \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}}$$

7. On a alors, pour tout $t \in I$ (puisque $t^2 \in I$ aussi), et tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|f(t) + f(t^2) - (f_n(t) + f_n(t^2))| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f(t^2) - f_n(t^2)| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^x (f(t) + f(t^2))\,\mathrm{d}t - \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x |f(t) + f(t^2) - f_n(t) - f_n(t^2)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2^{n-1}} = \frac{x}{2^{n-1}}.$$

De même, si $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$, on obtient :

$$\left| \int_0^x (f(t) + f(t^2))\,\mathrm{d}t - \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{-x}{2^{n-1}} = \frac{|x|}{2^{n-1}}.$$

Le majorant trouvé étant de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit alors du théorème d'encadrement que pour tout $x \in I$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x (f_n(t) - f_n(t^2))\,\mathrm{d}t = \int_0^x (f(t) - f(t^2))\,\mathrm{d}t.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans la relation

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))\,\mathrm{d}t,$$

on obtient alors :

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(t^2))\,\mathrm{d}t.}$$

8. (a) La fonction f étant continue sur I, il en est de même de $t \mapsto f(t) + f(t^2)$, comme somme et composée de fonctions continues. Or, $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (f(t) + f(t^2))\,\mathrm{d}t$ est dans ce cas une primitive de la fonction continue $t \mapsto f(t) + f(t^2)$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque $f = 1 + \frac{1}{2}g$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que $f' = \frac{1}{2}g'$, soit :

$$\forall x \in I, \quad \boxed{f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x^2))}.$$

(b) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: f est de classe $\mathcal{C}^n$.
La question précédente montre que $\mathcal{P}(1)$ est vrai.
Soit n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Alors $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(x^2))$ est de classe $\mathcal{C}^n$, comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Par conséquent, f' est de classe $\mathcal{C}^n$, donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty.}$

9. (a)
```
procedure Ptcarre(P:polynome; var Q:polynome);
var i:integer;
begin
  for i:=0 to Nmax do
    if i mod 2 = 0 then Q[i]:= P[i div 2]
                   else Q[i]:=0;

end;
```

(b)
```
procedure primitive(P:polynome; var Q:polynome);
var i:integer;
begin
  Q[0]:=0;   {le coefficient constant de Q est nul}
  for i:=1 to Nmax do
    Q[i]:= P[i-1]/i;
end;
```

(c) On calcule d'abord le polynôme $\frac{1}{2}(P(X)+P(X^2))$, puis sa primitive s'annulant en 0, et enfin on ajoute 1, ce qui revient à modifier le terme constant du polynôme obtenu.

```
procedure recurrence(P:polynome; var Q:polynome);
var i:integer;
    R,S:polynome
begin
  Ptcarre(P,R);
  for i:=0 to Nmax do
    S[i]:= (P[i] + R[i])/2;
  primitive(S,Q);
  Q[0]:=1;
end;
```

(d) D'après la question 6(b), on va jusqu'à un entier n tel que $\frac{1}{2^n} \leqslant e$, donc $n \geqslant \frac{\ln(e)}{\ln \frac{1}{2}}$.

```
procedure F(e:real; var P:polynome);
var i,n:integer;
begin
  P[0]:=1;                {initialisation de P a f_0}
  for i:=1 to Nmax do
    P[i]:=0;
  n:= int(ln(e)/ln(1/2)) +1;  {definition du rang d'arret}
  for i:=1 to n do
    recurrence(P,P);          {le resultat est directement restocke dans P}
end;
```

(e) Il s'agit simplement d'évaluer le polynôme obtenu dans la question précédente, en utilisant l'algorithme de Hörner (à revoir si vous ne le connaissez plus) :

```
function Fx(x,e:real):real;
var P:polynome;
    i:integer;
    S:real;
begin
  F(e,P);
  S:= P[Nmax];
  for i:=Nmax-1 downto 0 do
      S:= S * x + P[i];
  Fx:=S;
end;
```