Correction du DM n° 10

Correction de l'exercice 1 –

1. (a) La famille $\left(b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre. On peut lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Soit (f_1, f_2) la famille orthonormale obtenue. On a :

- $f_1 = \dfrac{b_1}{\|b_1\|} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}}$.
- $f_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$, où

$$u_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}}$.

(b) $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ est dans $F^\perp$ si et seulement si $\left\langle X, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$ et $\left\langle X, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0$, donc si et seulement si

$$\begin{cases} x+2y+z &= 0\\ 2x+y+t &= 0\end{cases} \qquad \text{soit:} \qquad \begin{cases} -3x+z-2t &= 0\\ -3y-2z+t &= 0\end{cases}.$$

Ainsi, X est dans $F^\perp$ si et seulement si

$$X = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t\\ -\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}t\\ z\\ t\end{pmatrix} = \frac{z}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{une base de } F^\perp \text{ est } \left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right)}$

Soit (f_1, f_2) obtenue par orthonormalisation de cette famille libre :

- $\boxed{f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}}$
- $f_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$, où :

$$u_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{4}{14}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{3}{7}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\\7\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}}$.

(c) D'après la formule du projeté orthogonal sur un espace muni d'une base orthonormale, le projeté orthogonale $p(X)$ de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sur F est :

$$\begin{aligned}
p(X) &= \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{30} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x+4y+2z \\ x+2y+z \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 16x-4y-8z+12t \\ -4x+y+2z-3t \\ -8x+2y+4z-6t \\ 12x-3y-6z+9t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 21x+6y-3z+12t \\ 6x+21y+12z-3t \\ -3x+12y+9z-6t \\ 12x-3y-6z+9t \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{M = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$

On trouve N en faisant de même avec la base orthonormale de $F^\perp$, ou alors, on se souvient que $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{id}$, donc

$$\boxed{N = I_4 - M = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

2. (a) La famille $(b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre. Soit (f_1, f_2, f_3) la famille orthonormale (b.o.n. de F) obtenue en orthonormalisant cette famille par le procédé de Schmidt. On a :

- $\boxed{f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$
- $f_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$, où :

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

- $f_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$, où :

$$u_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{f_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix}}$.

(b) D'après la formule du projeté orthogonal, en notant $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, et $p(X)$ le projeté orthogonal de X sur F, puisque (f_1, f_2, f_3) est une b.o.n. de F :

$$\begin{aligned}
p(X) &= \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+z\\0\\x+z\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}x-2y-z-2t\\-2x+4y+2z+4t\\-x+2y+z+2t\\-2x+4y+2z+4t\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}4x+2y-4z+2t\\2x+y-2z+t\\-4x-2y+4z-2t\\2x+y-2z+t\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}10x\\5y+5t\\10z\\5y+5t\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la matrice de la projection orthogonale sur } P \text{ est } \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}}$.

(c) On détermine d'abord $F^\perp$. $X = (x, y, z, t)$ est dans $F^\perp$ si et seulement si $\left\langle X, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$, $\left\langle X, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$ et $\left\langle X, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$, soit :

$$\begin{cases} x+z &= 0 \\ y+z+t &= 0 \\ 2x+y+t &= 0 \end{cases} \quad \text{soit:} \quad \begin{cases} x &= -z \\ z &= -y-t \\ -2z &= -y-t \end{cases} \quad \text{soit:} \quad \begin{cases} x = z = 0 \\ y = -t \end{cases}$$

Ainsi, $F^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, et les éléments Y de F étant caractérisés par $\left\langle Y, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$, on en déduit que F est l'hyperplan d'équation $y - t = 0$.

Soit alors $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ un vecteur queconque, et $p(X) = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}$ son projeté orthogonal sur F. On a :

- $p(X) \in F$, donc $y' = t'$, d'après l'équation de F ;
- $X - p(X) \in F^\perp$, donc il existe λ tel que $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \\ t-t' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{cases} y-y' & = \lambda \\ t-t' & = -\lambda \end{cases} \qquad \text{donc:} \qquad \begin{cases} y' & = y - \lambda \\ t' & = t + \lambda \end{cases}$$

En rempaçant dans l'équation $y' = t'$, il vient $y - \lambda = t + \lambda$, donc $\lambda = \frac{y-t}{2}$. Ainsi :

$$P(X) = X - \frac{y-t}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y+t}{2} \\ z \\ \frac{y+t}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X.$$

On retrouve bien la matrice $\boxed{M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. (a) • Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q, R) &= (\lambda P + Q)(-1)R(-1) + (\lambda P + Q)(0)R(0) + (\lambda P + Q)(1)R(1) \\ &= \lambda P(-1)R(-1) + Q(-1)R(-1) + \lambda P(0)R(0) + Q(0)R(0) + \lambda P(1)R(1) + Q(1)R(1) \\ &= \lambda\varphi(P, R) + \varphi(Q, R). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire par rapport à sa première variable.

- φ est clairement symétrique (commutativité du produit dans $\mathbb{R}$), donc φ est aussi linéaire par rapport à sa seconde variable.
- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\varphi(P, P) = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) \geqslant 0$, comme somme de trois termes positifs. Ainsi, φ est positive.
- Une somme de termes positifs ou nuls étant nulle si et seulement si chacun des termes est nul, $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si $P^2(-1) = P^2(0) = P^2(1) = 0$, donc si et seulement si $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$. Le polynôme P de degré au plus 2, admet alors au moins 3 racines. Il s'agit donc du polynôme nul. Ainsi, φ est définie positive.

On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur } \mathbb{R}_2[X].}$

(b) Par commodité, on note $\langle ., . \rangle$ ce produit scalaire. On vérifie rapidement qu'on a :

$$\langle 1, 1 \rangle = 3, \qquad \langle 1, X \rangle = 0, \qquad \langle 1, X^2 \rangle = 2, \qquad \langle X, X \rangle = 2, \qquad \langle X, X^2 \rangle = 0, \qquad \langle X^2, X^2 \rangle = 2.$$

La famille $(1, X, X^2)$ étant une base de $\mathbb{R}_2[X]$, elle est libre, et on peut lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Soit (F_1, F_2, F_3) la b.o.n. de $\mathbb{R}_2[X]$ ainsi obtenue.

- $\|1\| = \sqrt{3}$, donc $\boxed{F_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$
- $F_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|}$, où :

$$U_2 = X - \frac{1}{3} \langle X, 1 \rangle 1 = X, \qquad \text{avec} \qquad \|U_2\| = \|X\| = \sqrt{2}.$$

Ainsi, $\boxed{F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X}$

- $F_3 = \frac{U_3}{\|U_3\|}$, où :

$$U_3 = X^2 - \frac{1}{3} \langle X^2, 1 \rangle 1 - \frac{1}{2} \langle X^2, X \rangle X = X^2 - \frac{2}{3}.$$

On a donc :

$$\|U_3\|^2 = \|X^2\|^2 + \|\frac{2}{3}\|^2 - 2 \left\langle X^2, \frac{2}{3} \right\rangle = 2 + 3 \cdot \frac{4}{9} - 2 \cdots \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi $\boxed{F_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}(X^2 - \frac{2}{3})}$

Correction du problème 1 –

Partie I – Étude de φ

1. (a) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et $P'' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et donc, $(X-1)P' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $XP'' \in \mathbb{R}_n[X]$, puis $(X-1)P' - XP'' \in \mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, φ est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
   • La linéarité est évidente par linéarité de la dérivation et distributivité du produit sur la somme
   Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

   (b) Soit $j \in [\![0,n]\!]$, et soit $P = X^j$
   • Si $j = 0$, alors $P' = P'' = 0$, donc $\boxed{\varphi(X^0) = 0}$
   • Si $j = 1$, alors $P' = 1$ et $P'' = 0$, donc $\boxed{\varphi(X^1) = X - 1}$
   • Si $j \in [\![2,n]\!]$, on obtient :

$$\varphi(X^j) = j(X-1)X^{j-1} - j(j-1)X^{j-1} = \boxed{jX^j - j^2X^{j-1} = \varphi(X^j)}.$$

   (c) Par définition de la matrice d'un endomorphisme, on en déduit que :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}}$$

   (d) Les valeurs propres de φ sont les valeurs propres de M. Comme cette matrice est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc :

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(M) = [\![0,n]\!].$$

   Ainsi, l'endomorphisme φ de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$ admet $n+1$ valeurs propres 2 à 2 distinctes, donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

2. (a) Comme φ admet autant de valeurs propres que la dimension de l'espace, chaque espace propre est exactement de dimension 1, donc chaque espace propre est une droite.
   Or, soit $k \in [\![0,n]\!] = \mathrm{Sp}(\varphi)$, et soit P_0 un vecteur non nul du sous-espace propre E_k. Alors $E_k = \mathbb{R}P_0$.
   De plus, l'égalité $\varphi(P) = kP$ équivaut à $P \in E_k$, donc à l'existence de λ tel que $P = \lambda P_0$. Si $a \neq 0$ désigne le coefficient dominant de P_0, le coefficient dominant de P sera donc $a\lambda$. Il y a donc une et une seule façon de choisir λ de sorte que $a\lambda = 1$, donc de sorte de P soit unitaire.
   Ainsi, $\boxed{\text{il existe un et un seul polynôme unitaire } L_k \text{ tel que } \varphi(L_k) = kL_k.}$

   (b) On note $L_k = X^p + P(X)$, où $\deg P < p$. Alors

$$\varphi(L_k) = (X-1)(pX^{p-1} + P'(X)) - XL_k''(X) = pX^p + R(X),$$

   où R est un polynôme de degré strictement inférieur à p. Ainsi, par identification des coefficients des monômes de degré p dans l'égalité $\varphi(L_k) = kL_k$, il vient $k = p$, donc $\boxed{\deg L_k = k}$.

   (c) $L_0 \in \mathbb{R}_0[X]$, et est unitaire, donc $\boxed{L_0 = 1}$

   (d) Soit $k \geqslant 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\varphi(L_k) &= (X-1)\sum_{i=1}^{k} ia_iX^{i-1} - X\sum_{i=2}^{k} i(i-1)a_iX^{i-2} = \sum_{i=1}^{k} ia_iX^i - \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)a_{i+1}X^i - \sum_{i=1}^{k-1} i(i+1)a_{i+1}X^i \\ &= -a_1 + \sum_{i=1}^{k-1}(ia_i - (i+1)^2)a_{i+1})X^i + ka_kX^k.\end{aligned}$$

   Par identification des coefficients dans l'égalité $\varphi(L_k) = kL_k$, il vient donc :

$$\begin{cases} ka_0 &= -a_1 \\ ka_i &= ia_i - (i+1)^2a_{i+1}, \quad i \in [\![1, k-1]\!], \end{cases}$$

l'identification des monômes d'ordre k n'apportant rien de plus. Ainsi, puisque L_k est unitaire, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} (k-i)a_i = -(i+1)^2 a_{i+1}, & i \in [\![0, k-1]\!], \\ a_k = 1 \end{cases}}$$

(e) On raisonne par récurrence descendante sur $i \in [\![0,k]\!]$, pour montrer pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $\mathcal{P}(i)$: « $a_i = (-1)^{k-i}(k-i)!\binom{k}{i}^2$ ».

L'initialisation pour $i = k$ provient de l'égalité $a_p = 1$

Soit $i \in [\![1,k]\!]$ tel que $\mathcal{P}(i)$ soit vrai. Alors, d'après la question précédente, puis l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= -\frac{i^2 a_i}{k-(i-1)} = (-1)^{k-(i-1)} \frac{i^2}{k-(i-1)}(k-i)! \left(\frac{(k-i+1)^2}{i^2} \binom{k}{i-1} \right)^2 \\ &= (-1)^{k-(i-1)}(k-i+1)! \binom{k}{i-1}^2, \end{aligned}$$

ce qui correspond à $\mathcal{P}(i-1)$. Par conséquent, $\mathcal{P}(k)$ est vrai, et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathcal{P}(i)$ entraîne $\mathcal{P}(i-1)$, donc $\mathcal{P}(i)$ est vraie pour tout $i \in [\![0,k]\!]$:

$$\boxed{\forall i \in [\![0,k]\!], \quad a_i = (-1)^{k-i}(k-i)! \binom{k}{i}^2}.$$

3. La fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$, comme produit d'une fonction polynomiale, et d'une exponentielle, toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après la formule de Leibniz, appliquée à l'ordre k, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} k(k-1)\cdots(k-i+1)x^{k-i}\mathrm{e}^{-x}(-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-1)^k \mathrm{e}^x f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\binom{k}{k-i} \right)^2 (i!) x^{k-i}.$$

En effectuant alors un changement d'indices $i' = k - i$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-1)^k \mathrm{e}^x f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \left(\binom{k}{i} \right)^2 (k-i)! x^i,$$

et, d'après la description des coefficients a_i obtenue dans la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{(-1)^k \mathrm{e}^x f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = L_k(x).}.$$

Partie II – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

1. P et Q étant des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\Psi(P,Q) = \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} P(x) Q(x) \, \mathrm{d}x.$$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_k est égale à l'intégrale Γ de paramètre $k+1 > 0$, donc I_k converge.

(b) Soit R un polynôme quelconque. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} R(x) \, \mathrm{d}x$ est une combinaison linéaire finie d'intégrales I_k (obtenue en écrivant R comme somme de ses monômes). Ainsi, elle est convergente.

En particulier, étant donné P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, en prenant $R = PQ$, cela donne la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} P(x) Q(x) \, \mathrm{d}x$, donc $\boxed{\text{l'intégrale définissant } \langle P, Q \rangle \text{ est convergente.}}$

(c)
- La commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ nous assure la symétrie de Ψ.
- Soit P, Q, R dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Psi(\lambda P + Q, R) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\lambda P(t) + Q(t))R(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)\ \mathrm{d}t,$$

puisque les intégrales sont toutes convergentes. Ainsi, on a bien $\Psi(\lambda P + Q, R) = \lambda\Psi(P, R) + \Psi(Q, R)$. Comme Ψ est linéaire pas rapport à une variable et symétrique, elle est bilinéaire.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\Psi(P, P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \geqslant 0,$$

par positivité de l'intégrale.
- La fonction $t \mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ étant continue et positive, on peut utiliser la stricte positivité de l'intégrale : l'égalité est vérifiée dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si pour tout $t \in [0, +\infty[$, $P^2(t)\mathrm{e}^{-t} = 0$. Comme l'exponentielle n'est jamais nulle, cela est réalisé si et seulement si pour tout $t \in [0, +\infty[$, $P(t) = 0$, ce qui équivaut à $P = 0$, car un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

Ainsi, Ψ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, $\boxed{\Psi \text{ est donc un produit scalaire}}$.

2. Soit $i \in [\![O, k-1]\!]$. On utilise de nouveau la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_k^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{k-j} \binom{i}{j} k(k-1)\cdots(k-j+1)x^{k-j}\mathrm{e}^{-x}.$$

Comme, pour tous les indices j de cette somme $k - j > 0$, on obtient, en évaluant en 0 : $\boxed{f_k^{(i)}(0) = 0}$.

3. Soit i et k deux entiers naturels.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule d'intégration par parties d'ordre k (les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^k$), il vient :

$$\int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t = \Big[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(t)f_k^{(k-1-j)}(t)\Big]_0^x + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t)\ \mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, les valeurs de $f_k^{(k-1-j)}(0)$ sont toutes nulles, donc :

$$\boxed{\int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t)\ \mathrm{d}t.}$$

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_a^x L_i^{(k)}(t)f_k(t)\ \mathrm{d}t.$$

(b) Soit $j \in [\![0, k-1]\!]$. Comme nous l'avons justifié plus haut, il existe un polynôme Q de degré k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_k^{(k-j-1)}(x) = Q(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) = L_i^{(j)}(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x} \underset{+\infty}{\sim} ax^\ell\mathrm{e}^{-x},$$

où aX^ℓ est le monôme dominant du polynôme $L_i^{(j)}Q$. D'après les croissances comparées, on en déduit donc que :

$$\forall j \in [\![0, k-1]\!],\quad \lim_{x\to+\infty} L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) = 0,$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) = 0.$$

Par conséquent, en passant à la limite dans l'égalité de la question précédente (les intégrales étant convergentes car de la forme de la question II-b), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} L_i(t)f_k^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^k \int_a^{+\infty} L_i^{(k)}(t)f_k(t)\ \mathrm{d}t$$

Or, on a montré plus haut que pour tout x, $L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(t)$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} L_i(t)L_k(t)e^{-t}\ dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} L_i(t)f_k^{(k)}(t)\ dt$$

et d'après ce qu'on vient d'établir, il vient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} L_i(t)L_k(t)e^{-t}\ dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t)f_k(t)\ dt.}$$

(c) Soit $(i,k) \in [\![0,n]\!]^2$ tels que $i < k$. Alors :

$$\langle L_i, L_k\rangle = \int_0^{+\infty} L_i(t)L_k(t)e^{-t}\ dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t)f_k(t)\ dt = 0,$$

car, L_i étant de degré $i < k$, $L_i^{(k)} = 0$. Ainsi, les L_i, $i \in [\![0,n]\!]$, sont deux à deux orthogonaux, donc, pour le produit scalaire Ψ, la famille $\boxed{(L_0,\dots,L_n) \text{ est une famille orthogonale}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Le polynôme L_k étant unitaire de degré k, $L_k^{(k)}$ est constant égal à $k!$. Ainsi :

$$\langle L_k, L_k\rangle = \int_0^{+\infty} L_k(t)L_k(t)e^{-t} = \int_0^{+\infty} L_k^{(k)}(t)f_k(t) = k!\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} = k!\Gamma(k+1) = (k!)^2.$$

Ainsi, $\boxed{\|L_k\| = k!}$

On en déduit que $\boxed{\left(\frac{L_0}{0!}, \frac{L_1}{1!}, \dots, \frac{L_n}{n!}\right) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X]}$, pour le produit scalaire Ψ.

Partie III – Étude des racines de L_n

1. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ les ordres de multiplicité respectifs des racines $x_1,\dots,x_p$ de L_n. Soient $y_1,\dots,y_q$ les racines positives de multiplicité paire de L_n, leurs ordres de multiplicité respectifs étant notés $\beta_1,\dots,\beta_q$. Alors, il existe un polynôme Q, n'ayant pas de racine dans $\mathbb{R}_+$, tel que

$$L_n = Q\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{p}(X-y_j)^{\beta_j}.$$

On a donc :

$$RL_n = Q\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)^{\alpha_i+1}\prod_{j=1}^{p}(X-y_j)^{\beta_i}.$$

Puisque les α_i sont impairs, les $\alpha_i + 1$ sont pairs. De même, les β_j sont pairs. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \prod_{i=1}^{p}(X-x_i)^{\alpha_i+1}\prod_{j=1}^{p}(X-y_j)^{\beta_i} \geqslant 0.$$

De plus, Q n'ayant pas de racine dans $\mathbb{R}^+$, et étant continu (en tant que fonction polynominale), Q garde un signe constant sur $\mathbb{R}^+$ (sinon, cela contredirait le théorème des valeurs intermédiaires). Ainsi, RL_n garde un signe constant sur $\mathbb{R}_+$. Comme L_n et R sont unitaires, il en est de même de RL_n, et par conséquent, le monôme de plus haut degré donnant le comportement en $+\infty$, la limite de $R(x)L_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$. Le signe de RL_n sur $\mathbb{R}_+$ est donc nécessairement positif.
Ainsi, $\boxed{RL_n \text{ garde un signe constant positif sur } \mathbb{R}_+.}$

2. On suppose dans cette question que $p < n$.

   (a) Le polynôme R étant de degré $p < n$, on a $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or, $(L_0,\dots,L_{n-1})$ est une famille orthogonale constituée de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Cette famille libre ayant même cardinal que la dimension de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(L_0,\dots,L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, L_n est orthogonal à chacun de ces vecteurs, donc $L_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et en particulier, $L_n \perp R$. On en déduit que $\boxed{\langle L_n, R\rangle = 0}$.

(b) Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} L_n(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction $t \mapsto L_n(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ (d'après III-1), et continue sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de la propriété de stricte positivité de l'intégrale que cette fonction est nulle en tout point de $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad L_n(t)R(t)\mathrm{e}^{-t} = 0,$$

et, comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, on en déduit que tout t de $\mathbb{R}^+$ est racine du polynôme L_nR. Cela fait une infinité de racines pour ce polynôme, donc $\boxed{RL_n \text{ est le polynôme nul}}$.

3. (a) Le polynôme L_n est de degré n, le polynôme R est de degré $p \geqslant 0$ (R ne peut pas être nul par définition), donc RL_n est de degré au moins égal à n, donc ne peut pas être nul. La question précédente amène donc à une contradiction.

L'hypothèse faite au début de la question 2 est donc fausse, et par conséquent, $p \geqslant n$. Le nombre de racines ne pouvant pas excéder le degré du polynôme, on en déduit que $\boxed{p = n}$.

(b) Puisque $p = n$, et que L_n ne peut pas avoir plus de n racines comptées avec multiplicité, les racines $(x_1, \cdots, x_n)$ représentent toutes les racines de L_n (réelles ou complexes), et leur multiplicité est égale à 1. Ainsi, $\boxed{L_n \text{ a } n \text{ racines réelles distinctes, nécessairement simples, et toutes positives.}}$

Correction du problème 2 – (D'après Exercice 1 - Ecricome 2009)

Partie I – Étude d'un cas particulier

1. On a :
   - $\Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
   soit : $\Phi_A(V_1) = -V_2 + V_3$
   - $\Phi_A(V_2) = AV_2 - V_2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   soit : $\Phi_A(V_2) = -V_1 + V_4$
   - $\Phi_A(V_3) = AV_3 - V_3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   soit : $\Phi_A(V_3) = V_1 - V_4$
   - $\Phi_A(V_4) = AV_4 - V_4A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
   soit : $\Phi_A(V_4) = V_2 - V_3$

   Ainsi, la matrice T de Φ_A étant contituée des colonnes coordonnées des $\Phi_A(V_i)$ dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4), on obtient bien
   $$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Cette matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2. On effectue le calcul :
   $$T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{puis:} \qquad T^3 = T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4T.$$
   Ainsi, le polynôme $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de T. Ses racines sont 0, 2 et -2. Ainsi, ce sont les seules valeurs propres possibles de T :
   $$\mathrm{Sp}(T) \subset \{-2, 0, 2\}.$$
   Évidemment, pour le moment, on ne peut conclure qu'à une inclusion.

3. La matrice T est de rang au moins 2 (car ses deux premières colonnes sont non colinéaires), et de rang au plus 2 (car la troisième colonne est l'opposé de la deuxième, et la quatrième est l'opposé de la première). Donc $\mathrm{rg}(T) = 2$. Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f canoniquement associé,
   $$\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - \mathrm{rg}\, f = 2.$$

Or, les colonnes C_1, C_2, C_3, et C_4 de T vérifient

$$C_1 + C_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad C_2 + C_3 = 0,$$

ce qui se réécrit :

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans E_0, et y forment une famille libre (car ils sont non colinéaires. Comme E_0 est de dimension 2, il en résulte que ces deux vecteurs forment une base de E_0. On répond donc à la question : une base de E_0 est :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

4. On a, avec la même notation que ci-dessus pour les colonnes de T :

$$TX_1 = T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_1.$$

De même :

$$TX_2 = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 + C_2 - C_3 - C_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

5. Les vecteurs X_1 et X_2 étant non nuls, les deux relations précédentes signifient que X_1 et X_2 sont vecteurs propres associés respectivement à 2 et -2. On peut donc maintenant conclure que 0, 2 et -2 sont valeurs propres, et que $\mathrm{Vect}(X_1) \subset E_2$ et $\mathrm{Vect}(X_2) \subset E_{-2}$. Comme E_0 est de dimension 2, et que la somme des dimensions de espaces propres vaut 4, et que chaque espace propre E_2 et E_{-2} est au moins de dimension 1, ils ne peuvent pas être de dimension supérieure à 1. Ainsi, $\dim E_2 = \dim E_{-2} = 1$, et

$$E_2 = \mathrm{Vect}(X_1) \qquad \text{et} \qquad E_{-2} = \mathrm{Vect}(X_2).$$

Ainsi, puisque $\mathbb{R}^4 = E_0 \oplus E_{-2} \oplus E_2$, on obtient une base formée de vecteurs propres en juxtaposant des bases de chaques espace propre. Ainsi :

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de T. Notons b_1, b_2, b_3 et b_4 respectivement ces vecteurs. Alors, f désignant l'endomorphisme canoniquement associé à T, on a $f(b_1) = 0$, $f(b_2) = 0$, $f(b_3) = 2b_3$ et $f(b_4) = -2b_4$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base, on a donc :

$$T = \mathrm{Mat}_{\text{b.c.}}(f) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)P^{-1} = PDP^{-1}.$$

Le recours à l'endomorphisme canoniquement associé, et à la formule de changement de base, souvent omis par flemme, était attendu du concepteur de l'épreuve. Dans le rapport, il déplore le fait que peu (ou pas) de candidat passent par là pour justifier la relation $T = PDP^{-1}$. À bon entendeur...

6. Pas dur, la matrice T étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Pour trouver une telle base, les espaces propres étant orthogonaux, il suffit de juxtaposer des bases orthonormales de chaque espace propre. Ici, la base qu'on a déterminée dans la question précédente est déjà orthogonale (coup de chance), le seul défaut d'orthogonalité qu'il aurait pu y avoir étant entre b_1 et b_2 (les vecteurs de E_0), les autres sous-espaces vectoriels étant de dimension 1. Il suffit donc de diviser chaque vecteur par sa norme. On obtient une base orthonormale :

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

d'où la nouvelle matrice de passage, orthogonale cette fois :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

la matrice D étant toujours la même.

7. (a) Explicitons le produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. On a :

$${}^tAB = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_3 & a_1b_2 + a_3b_4 \\ a_2b_1 + a_4b_3 & a_2b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_ib_i.$$

L'expression de la matrice de Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) montre que $(V_1 - V_4, V_2 - V_3)$ (les vecteurs représentés par les colonnes de T) est une base de $\mathrm{Im}\,\Phi_A$, c'est-à-dire : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

La formule ci-dessus pour le produit scalaire montre que cette base est orthogonale. De plus, V_1 et V_4 étant orthogonaux, on a, d'après la relation de Pythagore :

$$\|V_1 - V_4\|^2 = \|V_1\|^2 + \|V_4\|^2 = 2, \qquad \text{donc:} \qquad \|V_1 - V_4\| = \sqrt{2},$$

et de même :

$$\|V_2 - V_3\| = \sqrt{2}.$$

On obtient donc une base orthonormale de $\mathrm{Im}\,\Phi_A$:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Notons f_1 et f_2 ces deux vecteurs

(b) Puisqu'on connait une base orthonormale de l'espace $\mathrm{Im}(\Phi_A)$ sur lequel on projette, on peut écrire, pour tout $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xV_1 + yV_2 + zV_3 + tV_4$:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{Im}(\Phi_A)}(X) &= \langle X, f_1 \rangle f_1 + \langle X, f_2 \rangle f_2 = \frac{1}{2}(x-t)(V_1 - V_4) + \frac{1}{2}(y-z)(V_2 - V_3) \\ &= \frac{1}{2}((x-t)V_1 + (y-z)V_2 + (z-y)V_3 + (t-x)V_4). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{V}}(p_{\mathrm{Im}\,\Phi_A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Soit $N = p_{\mathrm{Im}(\Phi_A)}(M)$. Alors pour tout $X \in \mathrm{Im}(\Phi_A)$ différent de N, $X - N \perp M - N$, donc :

$$\|X - M\|^2 = \|X - N + N - M\|^2 = \|X - N\|^2 + \|N - M\|^2 > \|N - M\|^2,$$

d'après l'égalité de Pythagore. Ainsi, N tel que $\|M - N\|$ soit minimal existe (N est donné par le projeté de M), et est unique.
On a :

$$N = p_{\mathrm{Im}(\Phi_A)}(M) = \frac{1}{2}(1-4)(V_1 - V_4) + \frac{1}{2}(2-3)(V_2 - V_3) = -\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 + \frac{3}{4}V_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$M - N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$d(M, \mathrm{Im}(\Phi_A)) = d(M, N) = \|M - N\| = \frac{5}{2}\sqrt{1+1+1+1} = 5.$$

(d) Soit Ψ la restriction de Φ_A à $\mathrm{Vect}(V_1, V_2)$. Alors la matrice de Ψ relativement aux base (V_1, V_2) de sont domaine de départ et à la base (V_1, V_2, V_3, V_4) de son domaine d'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, son image est engendrée par les deux vecteurs représentés par ses colonnes, donc par $V_3 - V_2$ et $V_4 - V_1$. Par conséquent, $\mathrm{Im}\,\Phi_A = \mathrm{Im}\,\Psi$.
De plus, d'après l'expression du prosuit scalaire, le produit scalaire entre deux matrices est égal au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ sur les colonnes les représentant dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4). Enfin, la colonne des coordonnées d'un élément de $\mathrm{Im}\,\Psi$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, on cherche à trouver (x, y) minimisant

$$F(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \|B - AX\|,$$

avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de rang 2. Les valeurs (x, y) minimisant cette expression sont les solutions du système

$${}^tAAX = {}^tAB.$$

Or, un calcul rapide amène :

$$^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient $2x = 1$ et $2y = 3$, soit $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$, puis :

$$N = \psi(x, y) = -\frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_4 + \frac{3}{2}V_4.$$

On retrouve bien la même matrice. Les autres calculs en découlent.

Partie II – Réduction de Φ_A dans le cas général

1. Tout d'abord, le produit de deux matrices carrées d'ordre n étant encore une matrice carrée d'ordre n, et la somme deux deux matrices carrées d'ordre n aussi, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, Φ_A est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.
   De plus, soit M, N deux matrices carrées d'ordre n, et λ un scalaire. Alors :
   $$\begin{aligned}\Phi_A(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A = AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= (AM - MA) + \lambda(AN - NA) = \Phi_A(M) + \lambda\Phi_A(N).\end{aligned}$$
   Ainsi, Φ_A est bien un application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. • Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
   $$\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(\,^tMN)\,\mathrm{Tr}(\,^t(\,^tMN)) = \mathrm{Tr}(\,^tNM) = \langle N, M\rangle\,,$$
   car, la trace n'étant définie qu'avec les coefficients diagonaux, et la transposition laissant invariante ces coefficients diagonaux, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(\,^tA)$. Ainsi, $\langle -, -\rangle$ est symétrique.
   • Soit $(M, N, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\langle M + \lambda N, P\rangle = \mathrm{Tr}(\,^t(M + \lambda N)P) = \mathrm{Tr}((\,^tM + \lambda\,^tN)P) = \mathrm{Tr}(\,^tMP) + \lambda\,\mathrm{Tr}(\,^tNP) = \langle M, P\rangle + \lambda\,\langle N, P\rangle\,,$$
   par linéarité de la transposition, puis par linéarité de la trace. Ainsi, $\langle -, -\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable, et la symétrie implique alors la linéarité par rapport à la deuxième variable aussi.
   • Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $^tM = (m'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et $^tMM = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. D'après la définition du produit matriciel, on a, pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$:
   $$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} m'_{i,j} m_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} m_{j,k}.$$
   Ainsi,
   $$\langle M, M\rangle = \mathrm{Tr}(\,^tMM) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{j,i}^2 \geqslant 0.$$
   • De plus, puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs, $\langle M, M\rangle = 0$ si et seulement si chacun de ces termes est nul, donc si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,j} = 0$, donc $M = 0$.

   Ainsi, il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc d'un produit scalaire.
3. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
   $$\langle \Phi_A(M), N\rangle = \mathrm{Tr}(\,^t(AM - MA)N = \mathrm{Tr}(\,^tMAN - A\,^tMN) = \mathrm{Tr}(\,^tMAN) - \mathrm{Tr}(A\,^tMN),$$
   puisque A est symétrique, et de même,
   $$\langle M, \Phi_A(N)\rangle = \mathrm{Tr}(\,^tMAN) - \mathrm{Tr}(\,^tMNA).$$
   Or, d'après les propriétés de la trace rappelées en début d'énoncé,
   $$\mathrm{Tr}(\,^tMNA) = \mathrm{Tr}(A\,^tMN),$$
   d'où finalement l'égalité :
   $$\langle \Phi_A(M), N\rangle = \langle M, \Phi_A(N)\rangle\,.$$
   On en déduit que Φ_A est un endomorphisme symétrique, donc diagonalisable.

4. (a) Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, et $Y = (y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. Alors on a :

$$M_{X,Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \quad \cdots \quad y_n) = (x_i y_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Comme X et Y sont des vecteurs propres, ils sont non nuls. Il existe donc i_0 et j_0 dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$. Alors le coefficient en position (i_0, j_0) de la matrice $M_{X,Y}$, égal à $x_{i_0} y_{j_0}$ est non nul, donc $M_{X,Y}$ est non nul.

Attention à ne pas dire trop vite que le produit de deux matrices non nulles est non nul. C'est faux en général.

De plus, on a

$$AY = \mu Y \qquad \text{donc:} \qquad {}^t(AY) = \mu\, {}^tY \qquad \text{donc:} \qquad {}^tY A = \mu\, {}^tY,$$

puisque A est symétrique.

(b) On a :

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX\, {}^tY - X\, {}^tYA.$$

Or, $AX = \lambda X$, et d'après ce qui précède, ${}^tYA = \mu\, {}^tY$. Ainsi :

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = \lambda X\, {}^tY - \mu X\, {}^tY = (\lambda - \mu) M_{X,Y}.$$

Montrons qu'on a alors $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.

Soit $\nu \in \Gamma$. Par définition, il existe deux éléments λ et μ de $\mathrm{Sp}(A)$ tels que $\nu = \lambda - \mu$. En considérant X et Y deux vecteurs propres associés respectievement à λ et à μ, le calcul précédent, et le fait que $M_{X,Y} \neq 0$, prouve que $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A, associé à la valeur propre $\nu = \lambda - \mu$. Ainsi, $\nu \in \mathrm{Sp}(\Phi_A)$. D'où l'inclusion.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.

(a) Supposons que pour tout vecteur propre de A, $MZ = 0$. La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A. D'après l'énoncé, on a donc $Mb_i = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Tout élément de $\mathbb{R}^n$ pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des b_i, on obtient $MX = 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, l'endomorphisme canoniquement associé à M est nul, donc M est nul.

Or, cela n'est pas possible, étant donné qu'un vecteur propre n'est pas nul. Ainsi, l'hypothèse initiale est fausse, donc il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.

On note μ la valeur propre associée à Z_0.

(b) On a : $\Phi_A(M) = \alpha M = AM - MA$. Ainsi, en multipliant cette égalité à droite par Z_0, il vient :

$$\alpha MZ_0 = AMZ_0 - MAZ_0 = AMZ_0 - \mu MZ_0, \qquad \text{soit:} \qquad A(MZ_0) = (\alpha + \mu)(MZ_0).$$

Comme MZ_0 est non nul, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre, la valeur propre associée étant $\lambda = a + \mu$

(c) Soit $\alpha \in \mathrm{Sp}(\Phi_A)$. La question précédente montre qu'il existe deux valeurs propres λ et μ de A telles que $\alpha = \lambda - \mu$, donc $\alpha \in \Gamma$. On en déduit l'inclusion $\mathrm{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$, et comme on avait déjà prouvé l'inclusion réciproque, il s'agit d'une égalité.

Partie III – Étude du rang de Φ_A

1. Soit $(\lambda_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant \ell$, une famille de réels tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} M_{X_i,Y_j} = 0.$$

On a alors :

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} X_i\, {}^tY_j \sum_{i=1}^{k} X_i \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j}\, {}^tY_j \right).$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le vecteur $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} \, {}^tY_j$ est un vecteur ligne. Notons-le $(\mu_{i,1} \quad \dots \quad \mu_{i,n})$. Ainsi, l'égalité précédente se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{k} X_i(\mu_{i,1} \quad \cdots \quad \mu_{i,n}) = 0.$$

Ainsi, la j-ième colonne du membre de droite est $\sum_{i=1}^{k} X_i \mu_{i,j}$. La nullité de toutes ces colonnes amène :

$$\forall j \in [\![1,\ell]\!], \quad \sum_{i=1}^{k} X_i \mu_{i,j} = 0.$$

Comme la famille $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est libre, on en déduit que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et tout $j \in [\![1,\ell]\!]$, $\mu_{i,j} = 0$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le vecteur

$$\begin{pmatrix} \mu_{i,1} \\ \vdots \\ \mu_{i,n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} Y_j$$

est nul. Ainsi, la famille $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant \ell}$ étant libre, il en découle que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, la famille $(\lambda_{i,j})$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$ est nulle. Ainsi, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, tout $j \in [\![1,\ell]\!]$, $\lambda_{i,j} = 0$. D'où la liberté de la famille M_{X_i,Y_j}.

2. (a) On a :

$$\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = \mathrm{Tr}({}^t(X \, {}^tY)(X' \, {}^tY)) = \mathrm{Tr}(Y \, {}^tXX' \, {}^tY).$$

   - Si $X \perp X'$, alors ${}^tXX' = 0$, donc $Y \, {}^tXX' \, {}^tY = 0$, donc $\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = 0$.
   - Si $Y \perp Y' = 0$, alors ${}^tYY' = 0$, donc

$$\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = \mathrm{Tr}((Y \, {}^tXX') \, {}^tY) = \mathrm{Tr}({}^tY(Y \, {}^tXX')) = 0.$$

   Ainsi, si $X \perp X'$ ou $Y \perp Y'$, alors $M_{X,Y} \perp M_{X',Y'}$.

   (b) Soit X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X\| = \|Y\| = 1$. On a alors :

$$\|M_{X,Y}\|^2 = \langle M_{X,Y}, M_{X,Y} \rangle = \mathrm{Tr}({}^t(X \, {}^tY)X \, {}^tY) = \mathrm{Tr}(Y \, {}^tXX \, {}^tY) = \mathrm{Tr}(Y\|X\|^2 \, {}^tY) = \mathrm{Tr}(Y \, {}^tY) = \mathrm{Tr}({}^tYY).$$

   Or, ${}^tYY$ est un réel, donc une matrice de taille 1×1. Ainsi :

$$\|M_{X,Y}\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tYY) = {}^tYY = \|Y\|^2 = 1.$$

   Ainsi, on obtient bien $\|M_{X,Y}\| = 1$.

   (c) Soient $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ deux familles orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \neq (i',j')$ dans $[\![1,k]\!] \times [\![1,\ell]\!]$. Alors, soit $i \neq i'$, soit $j \neq j'$. Ainsi, soit $X_i \perp X_{i'}$, soit $Y_j \perp Y_{j'}$. Par conséquent, d'après la question 2(a), $M_{X_i,Y_j} \perp M_{X_{i'},Y_{j'}}$. Par conséquent, la famille $(M_{X_i,Y_j})_{(i,j) \in [\![1,k]\!] \times [\![1,\ell]\!]}$ est orthogonale. De plus, d'après la question 2(b), les vecteurs de cette famille sont tous de norme égale à 1. Ainsi, il s'agit d'une famille orthonormale.

3. Soit λ une valeur propre de A, et soit n_λ la dimension du sous-espace propre E_λ de A associé à la valeur propre λ. Soit $(X_1, \dots, X_{n_\lambda})$ une base orthonormale de E_λ.

   (a) D'après la partie II, les $X_i \, {}^tX_j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n_\lambda$, sont des vecteurs propres de Φ_A, associés à la valeur propre $\lambda - \lambda$. Ainsi, ils sont dans $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$. De plus, d'après la question précédente, ils forment une famille orthonormale.

   (b) Par définition de F_λ, $(X_i \, {}^tX_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n_\lambda}$ est une famille génératrice de F_λ. C'est aussi une famille libre, puisqu'elle est orthonormale. Elle est de cardinale n_λ^2. Ainsi, on obtient : $\dim F_\lambda = n_l^2$.

4. Soit $(X_1, \dots, X_{n_\lambda})$ une base orthonormale de E_λ et $(Y_1, \dots, Y_{n_\mu}$ une base orthonormale de E_μ. Alors $(X_i \, {}^tX_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n_\lambda}$ est une base de F_λ et $(Y_k \, {}^tY_\ell)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n_\mu}$. De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n_\lambda]\!]^2$, et tout $(k,\ell) \in [\![1,n_\mu]\!]^2$, on a $X_i \perp Y_k$ (et aussi $X_j \perp Y_\ell$, mais une seule de ces deux propriétés suffit), car les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux ; donc, d'après la question 2(a), $X_i \, {}^tX_j$ et $Y_k \, {}^tY_\ell$ sont orthogonaux. Cela étant vrai pour tout (i,j) et tout (k,ℓ), on en déduit que les espaces qu'engendrent ces deux familles sont orthogonaux, soit : $F_\lambda \perp F_\mu$

5. (a) Tout ce qui précède montre que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad F_\lambda \subset \mathrm{Ker}(\Phi_A), \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda \subset \mathrm{Ker}(\Phi_A).$$

De plus, cette somme est directe, car constituée de sous-espaces deux à deux orthogonaux. Ainsi :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda \subset \mathrm{Ker}(\Phi_A).$$

De plus, si X et Y sont deux vecteurs propres de A, l'un associé à λ, l'autre à μ, avec $\lambda \neq \mu$, alors $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A, associé à $\lambda - \mu \neq 0$. Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux, il en résulte que $M_{X,Y} \in \mathrm{Ker}(\Phi_A)^\perp$. Ainsi, si $B_1, \dots, B_n$ désigne une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A, alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

- soit $M_{X_i,X_j} \in \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$, si X_i et X_j sont associés à la même valeur propre
- soit $M_{X_i,X_j} \in \mathrm{Ker}(\Phi_A)^\perp$, si X_i et X_j ne sont pas associés à la même valeur propre.

Par conséquent, tout vecteur M_{X_i,X_j}, $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, est soit dans $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$, soit dans $\mathrm{Ker}(\Phi_A)^\perp$. Puisque $(M_{X_i,X_j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc une famille génératrice, on en déduit que

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda + \mathrm{Ker}(\Phi_A)^\perp = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

De plus, cette somme est directe et orthogonale, car

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda \subset \mathrm{Ker}(\Phi_A),$$

et que $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi_A)^\perp$ sont en somme directe. Ainsi, puisqu'on est en dimension finie, $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}(\Phi_A)^\perp$, donc

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda = \mathrm{Ker}(\Phi_A).$$

(b) D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(\Phi_A) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim \mathrm{Ker}(\Phi_A) = n^2 - \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda\right) = n^2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(F_\lambda) = n^2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} n_\lambda^2.$$

(c) Il faut supposer ici que $n \geqslant 2$.

- Si A est de rang 1, 0 est valeur propre, puisque A n'est pas de rang n, donc n'est pas inversible. La dimension de E_0 est alors $n-1$, d'après le théorème du rang.
  La matrice A étant diagonalisable, 0 ne peut pas être la seule valeur propre (sinon, la somme des dimensions des espaces propres n'est pas égale à n). Il existe donc au moins un autre espace propre.
  Les espaces propres étant au moins de dimension 1, et la somme des dimensions des espaces propres ne pouvant excéder n, il ne peut y avoir qu'un autre espace propre, de dimension 1.
  Ainsi, A a deux espaces propres, l'un de dimension $n-1$, l'autre de dimension 1. On a alors

  $$\mathrm{rg}(\Phi_A) = n^2 - (n-1)^2 - 1^2 = 2n - 2.$$

  C'était le cas de la matrice A de la partie I, avec $n = 2$. On avait bien $\mathrm{rg}(\Phi_A) = 2 = 2 \cdot 2 - 2$.
- Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A possède n espaces propres, tous de dimension 1. Ainsi :

  $$\mathrm{rg}(\Phi_A) = n^2 - 1^2 - \cdots - 1^2 = n^2 - n = n(n-1).$$

  C'était aussi le cas de la matrice A de la partie I. Une vérification immédiate montre que la formule est aussi correcte dans cet exemple.