Correction du DM n° 12 : Variables à densité
DEVOIR FACULTATIF

Correction du problème – (d'après HEC 2002 Eco)

Partie I – Cas discret

A. Coefficient d'avarie

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T ne prend que des valeurs entières, on a :

$$P(T=n) = P(T \leqslant n) - P(T < n) = P(T \leqslant n) - P(T \leqslant n-1) = F(n) - F(n-1),$$

et donc finalement :

$$\boxed{P(T=n) = D(n-1) - D(n)}$$

Par ailleurs, $[T=n] \subset [T > n-1]$, donc $[T=n] \cap [T > n-1] = [T=n]$. On en déduit que

$$\pi_n = P([T=n]/[T>n-1]) = \frac{P([T=n] \cap [T>n-1]}{P(T>n-1)} = \frac{P(T=n)}{1-P(T \leqslant n-1)} = \frac{D(n-1)-D(n)}{1-F(n-1)},$$

et par conséquent, $\boxed{\pi_n = \dfrac{D(n-1)-D(n)}{D(n-1)}.}$

2. (a) D'après le cours, $\boxed{E(T) = \dfrac{1}{p}}$ et $\boxed{V(T) = \dfrac{1-p}{p^2}}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$D(n) = 1 - F(n) = P(T > n) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [T=k]\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T=k),$$

   par σ-additivité. Ainsi

$$D(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} p(1-p)^{\ell+n} = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)}.$$

   Ainsi, on obtient : $\boxed{D(n) = (1-p)^n}$

   (c) Il découle alors de la question 1 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\pi_n = \frac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}} = 1 - (1-p) \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{\pi_n = p}.$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\pi_n = \alpha$, donc

$$\alpha = \frac{D(n-1)-D(n)}{D(n-1)} \qquad \text{donc:} \qquad \alpha D(n-1) = D(n-1) - D(n),$$

   et par conséquent : $\boxed{D(n) = (1-\alpha)D(n-1)}$.

   (b) La suite $(D(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique : on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D(n) = (1-\alpha)^n D(0).$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, d'après la question 1 :

$$P(T=n) = D(n-1) - D(n) = D(0)((1-\alpha)^{n-1} - (1-\alpha)^n) = D(0)(1-\alpha)^{n-1}(1-(1-\alpha)) = D(0)\alpha(1-\alpha)^{n-1}.$$

Par ailleurs, T étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $D(0) = 1 - F(0) = 1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{P(T = n) = \alpha(1-\alpha)^n}.$$

Ainsi, $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)}$.

Remarquez que les conditions de l'énoncé impose nécessairement que $\alpha < 1$, du fait de la relation de la question 3(a) ($D(n)$ devant être positive en tant que probabilité, et $D(n) \neq 0$ par hypothèse). Ainsi, le paramètre obtenu pour la loi géométrique suivie par T est bien dans $]0,1[$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et N la variable aléatoire égale au nombre de composants tombés en panne jusqu'à l'instant n. À chaque instant, le fait de savoir si un composant tombe en panne ou non est une épreuve de Bernoulli, de paramètre p, ces épreuves étant indépendantes. La variable N compte le nombre de succès dans cette série d'épreuves, en majorant le résultat par le nombre total de composants (si $n \geqslant a+2$, l'événement $N = a+2$ regroupe tous les cas où le nombre total de succès excède $a+2$). Ainsi, N suit une loi obtenue de la loi binomiale en regroupant les cas supérieurs :

   * Si $n \leqslant a+2$, N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$
   * Si $n > a+2$, on obtient $N(\Omega) = [\![0, a+2]\!]$, et

$$\forall k \in [\![0, a+2]\!] P(N = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \neq a+2 \\ \sum\limits_{\ell=a+2}^{n} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} & \text{si } k = a+2. \end{cases}$$

Par ailleurs, soit $k \in [\![0, a+2]\!]$.

* Si $k = 0$ ou $k = 1$, et si $[N = k]$ est réalisé, alors l'appareil n'est pas en panne à l'instant n (il reste au moins un composant de chaque type). Ainsi :

$$P(T \leqslant n / N = k) = 0 \text{ si } k = 0 \text{ ou } k = 1.$$

* Si $k < a$ et $N = k$ est réalisé, alors les a composants de type A ne sont pas en panne. Ainsi, $T \leqslant n$ est réalisé si et seulement si les deux composants B sont tombés en panne avant l'instant n, donc, en dénommant « succès » le fait qu'un composant B tombe en panne, si le nombre de succès lors de la répétition d'épreuves de k tirs de composant (sans remise) est égal à 2. On reconnait une loi hypergéométrique de paramètres $(a+2, k, \frac{2}{a+2})$. Ainsi, si X est une variable aléatoire suivant une telle loi, on abtient :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant n / N = k) = P(X = 2) &= \frac{\binom{2}{2}\binom{a}{k-2}}{\binom{a+2}{k}} \\ &= \frac{a!(a+2-k)!k!}{(k-2)!(a-k+2)!(a+2)!} \\ &= \frac{k(k-1)}{(a+1)(a+2)} \end{aligned}$$

* Si $k = a$, et si $[N = k]$ est réalisé, $[T \leqslant n]$ est réalisé si et seulement si, avant le tirage n, on tire les 2 composants de type B, ou les a composants de type A. Ainsi, comme précédemment :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant n / N = a) &= \frac{\binom{2}{2}\binom{a}{a-2}}{\binom{a+2}{a}} + \frac{\binom{2}{0}\binom{a}{a}}{\binom{a+2}{a}} = \frac{a!a!2!}{(a+2)!(a-2)!2!} + \frac{2}{(a+2)(a+1)} \\ &= \frac{a(a-1)}{(a+1)(a+2)} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} = \frac{a^2 - a + 2}{(a+1)(a+2)} = \frac{(a+1)(a-2)}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-2}{a+2}. \end{aligned}$$

* Si $k = a+1$ et si $[N = k]$ est réalisé, $[T \leqslant n]$ est nécessairement réalisé. En effet, il reste à ce moment un seul composant en état de marche (de type A ou B), donc un des deux types de composants est entièrement épuisé.

$$P(T \leqslant n / N = a+1) = 1$$

* Enfin, si $k = a+2$, et si $[N = k]$ est réalisé, alors les deux composants A et B sont épuisés au moment n. Ainsi,
$$P(T \leqslant n/N = a+2) = 1.$$

Ainsi :
$$\forall k \in [\![0, a+2]\!], \quad \boxed{P(T \leqslant n/N = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0,1 \\ \dfrac{k(k-1)}{(a+1)(a+2)} & \text{si } k \in [\![2, a-1]\!] \\ \dfrac{a-2}{a+2} & \text{si } k = a \\ 1 & \text{si } k = a+1, a+2 \end{cases}}$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([N = k])_{k \in [\![0,a+2]\!]}$, on obtient alors :
$$\begin{aligned} P(T \leqslant n) = \sum_{k=2}^{a-1} \frac{k(k-1)}{(a+1)(a+2)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{a-2}{a+2} \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} \\ + \binom{n}{a+1} p^{a+1} (1-p)^{n-a-1} + \sum_{\ell=a+2}^{n} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell}. \end{aligned}$$

sachant que si $n < a+2$, certains des cas ci-dessus ne peuvent pas se produire, ce qui se traduit dans cette formule par le fait que les coefficients binomiaux correspondants sont nuls.

On obtient donc, pour tout $n \geqslant 2$,
$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T \leqslant n) - P(T \leqslant n-1) \\ &= \sum_{k=2}^{a-1} \frac{k(k-1)}{(a+1)(a+2)} \left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \right) \\ &\quad + \frac{a-2}{a+2} \left(\binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} - \binom{n-1}{a} p^a (1-p)^{n-1-a} \right) \\ &\quad + \sum_{\ell=a+1}^{n} \left(\binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} - \binom{n-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-1-\ell} \right) \end{aligned}$$

Cette somme peut un peu se simplifier, mais pas se calculer...

(b) ... ni celle donnant l'espérance de T.

B. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit U_k une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à k, et telle que :
$$\forall n \geqslant k, \quad P(U_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(a) Les différentes valeurs $P(U_k = n)$ sont positives, et
$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{+\infty} P(U_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{p^k}{(k-1)!} \sum_{n=k}^{+\infty} (n-1) \cdots (n-k+1)(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{p^k}{(k-1)!} \sum_{n=k-1}^{+\infty} n \cdots (n-k+2)(1-p)^{n-(k-1)}. \end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée $k-1$ fois (série du binôme négatif), donc
$$\sum_{n=k}^{+\infty} P(U_k = n) = \frac{p^k}{(k-1)!} \cdot \frac{(k-1)!}{(1-(1-p))^k} = 1.$$

Donc $\boxed{\text{cela définit bien une loi de probabilité.}}$

(b) La variable U_k admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

converge absolument, ce qui est le cas, en tant que série dérivée de la série géométrique, de raison dans $]-1,1[$. Ainsi $\boxed{U_k \text{ admet une espérance}}$, et :

$$E(U_k) = \frac{kp^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-p)^{n-k} = \frac{p^k}{(k-1)!}\cdot\frac{k!}{(1-(1-p))^{k+1}} = \frac{k}{p}.$$

Ainsi, $\boxed{E(X_k) = \frac{k}{p}}$.

D'après le théorème de transfert, la variable $U_k(U_k+1)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n=k}^{+\infty}(n+1)n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = k(k+1)\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$$

converge absolument, ce qui est le cas, en tant que série dérivée de la série géométrique, de raison dans $]-1,1[$. Ainsi $\boxed{U_k(U_k+1) \text{ admet une espérance}}$, et :

$$E(U_k(U_k+1)) = \frac{k(k+1)p^k}{(k+1)!}\sum_{n=k}^{+\infty}(n+1)n\cdots(n-k+1)(1-p)^{n-k} = \frac{k(k+1)p^k}{(k+1)!}\cdot\frac{(k+1)!}{(1-(1-p))^{k+2}} = \frac{k(k+1)}{p^2}.$$

Ainsi, U_k admet un moment d'ordre 2, égal à $E(U_k(U_k+1)) - E(U_k) = \frac{k(k+1)}{p^2} - \frac{k}{p}$, et donc une variance, égale à :

$$V(U_k) = E(U_k^2) - E(U_k)^2 = \frac{k(k+1)}{p^2} - \frac{k}{p} - \frac{k^2}{p^2} = \boxed{\frac{k(1-p)}{p^2} = V(U_k)}$$

2. Je propose deux méthodes.

* Par récurrence sur $n \geqslant m$. La relation est triviale pour $n = m$ (cela donne $1 = 1$). Soit n telle que la formule soit vraie pour cette valeur, alors :

$$\sum_{j=m}^{n+1}\binom{j}{m} = \sum_{j=m}^{n}\binom{j}{m} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1},$$

d'après la formule de Pascal. Ainsi, la formule reste vraie au rang $n+1$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant m$.

* Par un argument combinatoire : $\binom{n+1}{m+1}$ compte le nombre de sous-ensembles de cardinal $m+1$ de $[\![1, n+1]\!]$. On effectue un tri de ces sous-ensembles suivant la valeur de leur élément maximum (au moins égal à $m+1$, au plus à $n+1$). On écrit $j+1$ la valeur de ce maximum, $j \in [\![m, n]\!]$. Le choix d'un sous-ensemble de cardinal $m+1$ dont l'élément maximum est $j+1$ sera déterminé par la donnée de $j+1$ (cela ne laisse pas de choix), et d'un sous-ensemble quelconque de cardinale m de $[\![1, j]\!]$ (il y en a $\binom{j}{m}$). Ainsi, le nombre de sous-ensemble de $[\![1, n+1]\!]$ de cardinal $m+1$, dont l'élément maximum est $j+1$ est donné par $\binom{j}{m}$. En regroupant toutes kes valeurs possibles de j, on obtient bien :

$$\boxed{\binom{n+1}{m+1} = \sum_{j=m}^{n+1}\binom{j}{m}}$$

3. (a) S_2 prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$P(S_2 = n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}[T_1 = k] \cap [T_2 = n-k]\right) = \sum_{k=1}^{n-1} P([T_1 = k] \cap [T_2 = n-k]),$$

par σ-additivité, les événements étant 2 à 2 incompatibles. Ainsi, T_1 et T_2 étant indépendantes,

$$P(S_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(T_1 = k)P(T_2 = (n-k)) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{k-1}(1-p)^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}.$$

Ces termes ne dépendant plus de k, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \boxed{P(S_2 = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.}$$

On reconnaît la loi de U_2. Ainsi, S_2 et U_2 suivent la même loi.

(b) i. Soit, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: S_k a la même loi que U_k.

Nous venons de vérifier $\mathcal{P}(2)$. Par ailleurs, pour $k = 1$, on retrouve pour U_k l'expression d'une loi géométrique, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie également.

Soit $k \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai. Alors S_{k+1} prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à $k+1$, et, pour tout $n \geqslant k+1$,

$$P(S_{k+1} = n) = P\left(\bigcup_{\ell=k}^{n-1} [S_k = \ell] \cap [T_{k+1} = n-\ell]\right) = \sum_{\ell=k}^{n-1} P([S_k = \ell] \cap [T_{k+1} = n-\ell])$$

par σ-additivité, les événements étant incompatible. Comme S_k et T_{k+1} sont indépendantes (car S_k ne dépend que des T_i, $i \in [\![1, k]\!]$), on en déduit que :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = n) &= \sum_{\ell=k}^{n-1} P([S_k = \ell])P([T_{k+1} = n-\ell]) = \sum_{\ell=k}^{n-1} \binom{\ell-1}{k-1} p^k(1-p)^{\ell-k} p(1-p)^{n-\ell-1} \\ &= p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \sum_{\ell=k}^{n-1} \binom{\ell-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question I-B-2, il vient :

$$P(S_{k+1} = n) = p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \sum_{\ell=k-1}^{n-2} \binom{\ell}{k-1} = p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}\binom{n-1}{k}.$$

Ainsi, la loi de S_{k+1} est bien celle de U_{k+1}, d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_k \text{ a la même loi que } U_k.}$

ii. On a alors :

$$E(U_k) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} = \boxed{\frac{k}{p} = E(U_k)}$$

De même, puisque les T_i sont mutuellement indépendantes :

$$V(U_k) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-p)}{p^2} = \boxed{\frac{k(1-p)}{p^2} = V(U_k)}$$

Remarquez également qu'on aurait pu facilement montrer, par un argument de probabilité, que la loi de U_k correspond au temps d'attente du k-ième succès : le coefficient binomial correspond au placement des $k-1$ premiers succès (le k-ième étant imposé au rang n), et les puissances aux probabilités des k succès et des $n-k$ échecs alors obtenus. On retrouve alors plus simplement la loi de S_k, sans calcul.

4. (a) Nous n'avons pas encore vu de fonction de simulation, mais cela se comprend bien. La probabilité que le composant tombe en panne à un instant i étant p, on obtient :

```
Function NbP(p:real; n:integer):integer;


var i,panne:integer;
```

```
begin
  randomize;
  for i:=1 to n do
    if random < p then panne:=panne+1;
  NbP:=panne;
end;
```

(b) Pas très différent !

```
Procedure Arret(p:real; r:integer);

var i,panne:integer;

begin
  randomize;
  i:=0;
  panne:=0;
  repeat
    i:=i+1;
    if random < p then panne:=panne+1;
  until
    panne=r;
  writeln('La r-ième panne est survenue lors de l''instant',i);
\end;
```

Partie II – Cas continu

A. Loi de survie et coefficient d'avarie

1. Soit t un réel positif. Pour tout réel strictement positif h, on note $q(t,h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t+h$, sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t :

$$q(t,h) = P(T \in]t, t+h]/T > t).$$

(a) L'événement $[T \in]t, t+h])$ est inclus dans l'événement $[T > t]$, donc

$$q(t,h) = \frac{P(([T \in]t, t+h]] \cap [T > t])}{P(T > t)} = \frac{P(t < T \leqslant t+h)}{1 - P(T \leqslant t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{F(t)},$$

et, par définition de D :

$$\boxed{q(t,h) = \frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}}.$$

(b) Il manque des hypothèses pour pouvoir conclure cela. Tout d'abord, la dérivabilité ne peut être obtenue que pour $t > 0$ (voir le cas de la loi exponentielle traitée plus loin). De plus, F étant par définition de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout seulement, on n'obtient la dérivabilité de D que presque partout. En fait, D est dérivable en tout point t en lequel f est continue, et alors

$$D'(t) = -f(t).$$

Sans une hypothèse de continuité sur f, on ne peut pas dire plus.

(c) Supposons toujours que t est tel que f soit continue en t. Alors

$$\frac{q(t,h)}{h} = \frac{D(t) - D(t+h)}{h} \cdot \frac{1}{D(t)},$$

et, par dérivabilité de D en t, cette expression admet une limite lorsque h tend vers 0^+ :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{q(t,h)}{h} = \frac{-(-f(t))}{D(t)} = \frac{f(t)}{D(t)},$$

et donc, par définition de π :

$$\boxed{\lim_{h\to 0^+} \frac{q(t,h)}{h} = \pi(t)}.$$

Pour obtenir cela sur tout $\mathbb{R}_+^*$, on est ici encore obligé de supposer la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour l'obtenir en 0, il faut la continuité à droite de f en 0.

2. (a) Soit $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Sa fonction de répartition F est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et vérifie

$$\forall t \geqslant 0, \quad F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Ainsi, la loi de survie du composant est :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \boxed{D(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

Allure : figure 1.

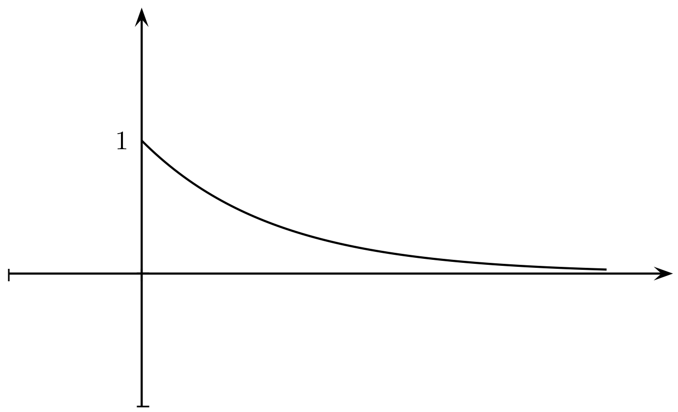

Figure 1 – Allure de la loi de survie D (question 2(a))

(b) On a alors, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)} = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Puisque, d'après le cours, $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, on obtient bien $\boxed{\pi(t) = \dfrac{1}{E(T)}}$.

3. (a) La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$), et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}.$$

cette expression admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, d'où la convergence de l'intégrale, et

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}$.

(b) La variable T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ converge (absolument, mais la fonction étant positive, cette hypothèse sera nécessairement vérifiée). On peut faire une intégration par partie, ou alors constater que l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est le moment d'ordre 2 d'une variable suivant une loi normale centrée réduite. Ainsi, cette intégrale converge, donc aussi celle sur $[0,+\infty[$. Donc $E(T)$ existe, et, par parité de la fonction intégrée, si X est une variable suivant la loi normale centrée réduite,

$$E(T) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}E(X^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}V(X),$$

puisque $E(X) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{E(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

(c) La variable T étant à valeurs positives, la stricte croissante de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (de dérivée ne s'annulant qu'en 0) nous assure, d'après le premier théorème de transfert, que T^2 est une variable à densité. De plus, pour tout $x \geqslant 0$, puisque T est à valeurs positives,

$$P(T^2 \leqslant x) = P(T \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}),$$

et, puisqu'on a déjà justifié que T^2 est une variable à densité, on peut dériver presque partout pour obtenir une densité de T^2 :

$$\forall x > 0, \quad f_{T^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Ainsi, $\boxed{T^2 \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right).}$

Par conséquent $E(T^2) = 2$, et donc, d'après la formule de König-Huygens :

$$\boxed{V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = 4 - \frac{\pi}{2}.}$$

(d) D'après le calcul effectué en 3(a) :

$$\forall t \geqslant 0, \quad F(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ainsi, la loi de survie est :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \boxed{D(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$

La fonction D est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (à droite en 0). On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$D'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad D''(t) = (-1+t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ainsi, $D'(0) = 0$, et $D(0) = 1$, donc on a une tangente horizontale en 0 d'équation $\boxed{T_0 : y = 1}$.

De plus, $D''(t) = 0$ si et seulement si $t = 1$ (car D est définie sur $\mathbb{R}_+$ uniquement), et D'' change effectivement de signe en 1. Donc la courbe de D présente un point d'inflexion en 1, l'équation de la tangente étant $\boxed{T_1 : -e^{-\frac{1}{2}}(x-1) + e^{-\frac{1}{2}}}$ Remarquez que cette tangente passe par le point $(2,0)$.

Allure : figure 2.

(e) Le coefficient d'avarie est donné par :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)} = \frac{te^{-\frac{t^2}{2}}}{e^{-\frac{t^2}{2}}} = \boxed{t = \pi(t)}.$$

4. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables (sous l'hypothèse que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$), et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(t) = e^{\alpha t}D'(t) + \alpha e^{\alpha t}D(t) = e^{\alpha t}(-f(t) + \alpha D(t)) = e^{-\alpha t}(-f(t) + \pi(t)D(t)) = 0,$$

par définition de $\pi(t)$. Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car D l'est, puisque F l'est), $\boxed{g \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+.}$

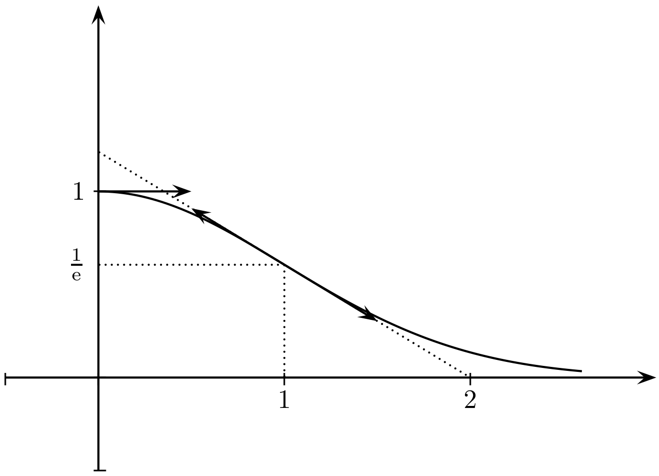

FIGURE 2 – Allure de D (question 3(d))

(b) Notons k la valeur constante de g. On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad D(t) = k\mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad \text{donc:} \qquad F(t) = 1 - k\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Comme F est continue en 0, par définition d'une variable à densité, et comme F est nulle sur $\mathbb{R}_-$, il vient $k = 1$. Ainsi

$$\forall t \geqslant 0, \quad F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

On en déduit que $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)}$

B. Entretien préventif

1. On a, toujours en supposant f continue (donc D de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \theta]$, et en faisant une intégration par parties :

$$\int_0^\theta D(t)\ \mathrm{d}t = \Big[tD(t)\Big]_0^\theta + \int_0^\theta tf(t)\ \mathrm{d}t = \theta D(\theta) + F(\theta)\int_0^\theta t\frac{f(t)}{F(\theta)}\ \mathrm{d}t$$

puisque $F(\theta) \neq 0$, puisque f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$\boxed{\int_0^\theta D(t)\ \mathrm{d}t = P(T > \theta) + P(T \leqslant \theta)\int_0^\theta t \cdot \frac{f(t)}{F(\theta)}\ \mathrm{d}t.}$$

2. On a $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, donc $c_1 = \lambda(K + C)$.
On a, pour tout $t \geqslant 0$, $D(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, donc

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta})C}{\displaystyle\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t} = \lambda\frac{K + (1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}C)}{(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta})} = \boxed{\lambda\left(\frac{K}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}} + C\right) = c_2(\theta)}.$$

Ainsi, on obtient $\boxed{c_2(\theta) \geqslant c_1}$, donc la deuxième méthode est moins rentable. Le coût d'un remplacement systématique d'un matériel non encore en panne (qui engendre donc plus de remplacements) ne compense pas le préjudice subi lors d'une panne.

3. On suppose que T suit la loi décrite dans la question A-3 de la partie II.

(a) On a $E(T) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, donc $\boxed{c_1 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(K + C)}$.

Par ailleurs, pour tout $t \geqslant 0$, $D(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, donc

$$\lim_{\theta \to +\infty} \int_0^\theta D(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} D(t)\ \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},$$

et donc, $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\displaystyle\int_0^\theta D(t)\ \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{\theta\to+\infty} D(\theta)=0$. On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{\theta\to+\infty} c_2(\theta) = \frac{K+C}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = c_1}.$$

(b) (Erreur de signe dans l'énoncé) On pose, pour tout $\theta>0$,

$$\varphi(\theta) = C\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{\theta}(K + C(1-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}).$$

La fonction $\theta \mapsto \displaystyle\int_0^\theta \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$ est la primitive de $t\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ s'annulant en 0. En particulier, elle est dérivable. Ainsi, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et

$$\forall\theta\in\mathbb{R}_+^*,\quad \varphi'(\theta) = C\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\theta^2}(K + C(1-\mathrm{e}^{\frac{-\theta^2}{2}})) - C\mathrm{e}^{\frac{-\theta^2}{2}}.$$

On obtient donc :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}_+^*,\quad \varphi'(\theta) = \frac{1}{\theta^2}(K + C(1-\mathrm{e}^{\frac{-\theta^2}{2}})).$$

Puisque K et C sont strictement positifs, et puisque pour tout $theta>0$, $\mathrm{e}^{\frac{-\theta^2}{2}}<1$, on en déduit que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}_+^*,\quad \boxed{\varphi'(\theta)>0}.$$

De plus, $\varphi(\theta)\underset{0}{\sim} -\dfrac{K}{theta}$, donc sa limite en 0 est $-\infty$, et sa limite en $+\infty$ est $C\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = C\sqrt{pi}2$.
Ainsi, le tableau de variations de φ est :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
$\varphi(x)$	$-\infty \nearrow C\cdot\frac{2}{\pi}$

(c) La fonction c_2 est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et, pour tout $\theta>0$, on a :

$$c_2'(\theta) = \frac{-C\cdot D'(\theta)\displaystyle\int_0^\theta D(t)\ \mathrm{d}t - D(\theta)(K + (1-D(\theta))C)}{\left(\displaystyle\int_0^\theta D(t)\ \mathrm{d}t\right)^2}.$$

Puisque $D'(\theta) = -\theta\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} = -\theta D(\theta)$, on obtient

$$c_2'(\theta) = -D'(\theta)\cdot\frac{\varphi(\theta)}{\left(\displaystyle\int_0^\theta D(t)\ \mathrm{d}t\right)^2}.$$

Comme D' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, c_2' est du signe de φ. Or, φ étant continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $]-\infty, C\sqrt{\frac{2}{\pi}}[$. La borne supérieure de cet intervalle étant strictement positive, il existe une unique valeur $\theta_0>0$ telle que $\varphi'(\theta_0)=0$, et alors φ' est strictement négative sur $]0,\theta_0[$ et strictement positive sur $]\theta_0,+\infty[$. Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant pour c_2 :

x	0		θ_0		$+\infty$
${c_2}'(x)$		$-$	0	$+$	
$c_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$c_2(\theta_0)$	$\nearrow$	c_1

Par conséquent, $\boxed{c_2 \text{ admet un minimum en } \theta_0}$, et comme c_2 est strictement croissante sur $[\theta_0, +\infty[$, ce minimum vérifie :

$$\boxed{c_2(\theta_0) < \lim_{\theta \to +\infty} c_2(\theta) = c_1.}$$

qu'elle admet un minimum en θ_0 qui vérifie $c_2(\theta_0) < c_1$.

(d) On a $\varphi(\theta_0) = 0$, donc $\displaystyle\int_0^{\theta_0} D(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{C\theta_0}(K + C(1 - D(\theta_0)))$, et par conséquent,

$$c_2(\theta_0) = \frac{K + C(1 - D(\theta_0))}{\frac{1}{C\theta_0}(K + C(1 - D(\theta_0)))} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{c_2(\theta_0) = C\theta_0}.$$

Ainsi,

$$\theta_0 = \frac{c_2(\theta_0)}{C} = \frac{\frac{K}{C} + (1 - D(\theta_0))}{\displaystyle\int_0^{\theta_0} D(t)\ \mathrm{d}t} < \frac{\frac{K}{C} + 1}{\displaystyle\int_0^{+\infty} D(t)\ \mathrm{d}t},$$

et d'après la valeur déjà calculée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} D(t)\ \mathrm{d}t$, on obtient :

$$\boxed{\theta_0 < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + \frac{K}{C}\right)}.$$

(e) Comme c_2 est croissante sur $[\theta_0, +\infty[$, on ne peut pas avoir $\theta_0 < 1.45$, sinon, il faudrait $c_2(1.45) < c_2(1.5)$. Ainsi, $\theta_0 > 1.45$.

De plus, $c_2(\theta_0)$ est le minimum de c_2, donc $c_2(\theta_0) \leqslant c_2(1.5) = 1.5429 < 1.55$. Or, $c_2(\theta_0) = C\theta_0 = \theta_0$, donc $\theta_0 < 1.55$.

On obtient donc : $\boxed{1.45 < \theta_0 < 1.55}$.

C. Nombre de remplacements dans un laps de temps donné (partie rajoutée)

1. (a) Les T_i suivent des lois $\mathcal{E}(\lambda)$, donc des lois $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$, et sont mutuellement indépendantes. Par stabilité de la loi Gamma, on en déduit que $\boxed{T_1 + \cdots + T_n \text{ suit une loi } \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right).}$

(b) Le nombre de pannes est supérieur à n à l'instant 2θ si et seulement si la fin de vie du n-ième composant a lieu avant l'instant 2θ, cette fin de vie étant égale aux durées de vie cumulées des composants précédents. Ainsi, $[N \geqslant n]$ est réalisé si et seulement si $[T_1 + \cdots + T_n \leqslant 2\theta]$ est réalisé. Par conséquent,

$$P(N \geqslant n) = P(T_1 + \cdots + T_n \leqslant 2\theta) = \int_0^{2\theta} \lambda(\lambda t)^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t,$$

d'après la loi suivie par $T_1 + \cdots + T_n$. Or, par un changement de variables $u = \lambda t$, de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient :

$$P(N \geqslant n) = \int_0^{2\theta\lambda} u^{n-1} \mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \int_0^{2\theta\lambda} (2\theta\lambda - x)^{n-1} \mathrm{e}^{x - 2\theta\lambda}\ \mathrm{d}x,$$

par un second changement de variable $u = 2\theta\lambda - x$. Ainsi

$$P(N \geqslant n) = \mathrm{e}^{-2\theta\lambda} \int_0^{2\theta\lambda} (2\theta\lambda - x)^{n-1} \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x.$$

Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée entre 0 et $2\theta\lambda$, à l'ordre $n-1$, à la fonction $x \mapsto e^x$, de classe $\mathcal{C}^n$, de dérivée n-ième égale à elle-même, on obtient :

$$e^{2\theta\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2\theta\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^0 + \int_0^{2\theta\lambda} (2\theta\lambda - x)^{n-1} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\boxed{P(N \geqslant n) = 1 - \mathrm{e}^{-2\theta\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2\theta\lambda)^k}{k!}}.$$

(c) La variable N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N = n) = P(N \geqslant n) - P(N \geqslant n+1) = \mathrm{e}^{-2\theta\lambda} \frac{(2\theta\lambda)^n}{n!}.$$

Ainsi, $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{P}(2\theta\lambda)}$. On a alors $\boxed{E(N) = 2\theta\lambda}$ et $\boxed{V(N) = 2\theta\lambda}$.

(d) Chaque panne coûte $C+K$ (préjudice + remplacement). Ainsi, $B = (C+K)N$, donc $\boxed{E(B) = 2\theta\lambda(C+K)}$

Par ailleurs, $c_1 = \frac{K+C}{E(T)} = \lambda(C+K)$. On obtient $E(B) = 2\theta c_1$, ce qui correspond à l'interprétation donnée dans l'énoncé (mais non justifiée) de c_1 (coût par unité de temps, donc pour obtenir le coût sur un intervalle de longueur 2θ, on multiplie c_1 par la longueur de cet intervalle).

2. Dans cette question, on se donne une valeur $\theta > 0$, et on suppose qu'on effectue les remplacements du composant suivant la méthode 2 exposée dans la partie B. On suppose que la durée de vie d'un composant suit une loi exponentielle de paramètre λ. On note T_i la durée de vie du i-ième composant et U_i la durée d'utilisation. On a donc $U_i(\omega) = T_i(\omega)$ si $T_i(\omega) < \theta$, et $U_i(\omega) = \theta$ sinon. On se propose ici de déterminer la fonction de répartition de $U_1 + U_2$, U_1 et U_2 étant supposés indépendants.

(a) L'événement $[U_i = \theta]$ est réalisé si et seulement si l'événement $[T_i \geqslant \theta]$ est réalisé, donc

$$P(U_i = \theta) = P(T_i \geqslant \theta) = 1 - F_{T_i}(\theta) = \mathrm{e}^{-\lambda\theta}.$$

Comme λ et θ sont non nuls, on obtient $P(U_i = \theta) > 0$, donc $\boxed{U_i \text{ n'est pas une variable à densité}}$ (on a une probabilité ponctuelle non nulle).

Le produit de convolution permet de calculer la densité d'une somme, dans le cas de variables à densité. Ce n'est pas le cas ici, donc on ne peut pas utiliser le produite de convolution directement. Il va falloir ruser un peu.

(b) Puisque U_1 et U_2 prennent des valeurs inférieures ou égales à θ, leur somme vaut 2θ si et seulement si ils ont chacun pris la valeur θ. Ainsi

$$P(U_1 + U_2 = 2\theta) = P([U_1 = \theta] \cap [U_2 = \theta]),$$

et les U_i étant indépendants,

$$\boxed{P(U_1 + U_2 = 2\theta) = P(U_1 = \theta)P(U_2 = \theta) = (\mathrm{e}^{-\lambda\theta})^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda\theta}},$$

d'après ce qui précède. Ainsi, comme plus haut, on obtient $P(U_1 + U_2 = 2\theta \neq 0$, et par conséquent, $U_1 + U_2$ n'est pas une variable aléatoire à densité.

(c) * La fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}$,

* La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta - \frac{1}{n}, \theta\}$, donc continue presque partout.

* On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\theta - \frac{1}{n}} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x + \int_{\theta - \frac{1}{n}}^{\theta} n \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} = F_{T_1}(\theta - \frac{1}{n}) + \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)}$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} + \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est une densité de probabilité}}$.

(d) La fonction de répartition F de U_1 est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leqslant x < \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta. \end{cases}$$

La fonction de répartition F_n de X_n est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leqslant x < \theta - \frac{1}{n} \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} + (x - \theta + \frac{1}{n}) n \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} & \text{si } \theta - \frac{1}{n} \leqslant x < \theta, \\ 1 & \text{si } x \geqslant \theta. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$*$ Si $x \leqslant 0$, $F_n(x) = 0 \to F(x) = 0$.

$*$ Si $0 < x < \theta$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $x < \theta - \frac{1}{n} < \theta$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$F_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} = F(x) \longrightarrow F(x)$$

$*$ Si $x \geqslant \theta$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 1 = F(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ tend vers $F(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\boxed{X_n \text{ converge en loi vers } U_1}$.

(e) Soit n tel que $\frac{1}{n} < \frac{\theta}{2}$.

Les variables X_n et Y_n sont indépendantes. Ainsi, une densité de leur somme $X_n + Y_n$ est égale au produit de convolution de leur densité. Déterminons ce produit de convolution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$g(x) = f_1 \star f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_1(x-t) \, \mathrm{d}t.$$

Or, pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$f_1(t) f_1(x-t) = \begin{cases} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } t \in [0, \theta - \frac{1}{n}] \cap [x - \theta + \frac{1}{n}, x], \\ n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} & \text{si } t \in [0, \theta - \frac{1}{n}] \cap [x - \theta, x - \theta + \frac{1}{n}], \\ n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} & \text{si } t \in [\theta - \frac{1}{n}, \theta] \cap [x - \theta + \frac{1}{n}, x], \\ n^2 \mathrm{e}^{-2\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} & \text{si } t \in [\theta - \frac{1}{n}, \theta] \cap [x - \theta, x - \theta + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En s'aidant de petits diagrammes, on obtient alors :

$*$ Si $x < 0$, alors $g(x) = 0$.

$*$ Si $0 \leqslant x < \theta - \frac{1}{n}$,

$$g(x) = \int_0^x \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}t = \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

$*$ Si $\theta - \frac{1}{n} \leqslant x < \theta$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{x - \theta + \frac{1}{n}} n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} + \int_{x - \theta + \frac{1}{n}}^{\theta - \frac{1}{n}} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}t + \int_{\theta - \frac{1}{n}}^{n} n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \, \mathrm{d}t \\ &= n \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(x - \theta + \frac{1}{n}\right)}\right) + (2\theta - \frac{2}{n} - x) \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} + n \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n} + x\right)} \left(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)}\right) \\ &= 2n \left(\mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) + (2\theta - \frac{2}{n} - x) \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

$*$ Si $\theta \leqslant x < 2\theta - \frac{2}{n}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{x-\theta}^{x - \theta + \frac{1}{n}} n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t + \int_{x - \theta + \frac{1}{n}}^{\theta - \frac{1}{n}} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}t + \int_{\theta - \frac{1}{n}}^{\theta} n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} \, \mathrm{d}t \\ &= n \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} \left(\mathrm{e}^{-\lambda(x-\theta)} - \mathrm{e}^{-\lambda\left(x - \theta + \frac{1}{n}\right)}\right) + \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} (2\theta - \frac{2}{n} - x) + n \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} \mathrm{e}^{-\lambda x} (\mathrm{e}^{\lambda\theta} - \mathrm{e}^{\lambda\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} \\ &= 2n \left(\mathrm{e}^{-\lambda\left(x - \frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) + \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \left(2\theta - \frac{2}{n} - x\right) \end{aligned}$$

$*$ Si $2\theta - \frac{2}{n} \leqslant x < 2\theta - \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_{x-\theta}^{\theta-\frac{1}{n}} n\lambda e^{-\lambda t} e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} \, dt + \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{x-\theta+\frac{1}{n}} n^2 e^{-2\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} \, dt + \int_{x-\theta+\frac{1}{n}}^{\theta} n\lambda e^{-\lambda(x-t)} e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} \, dt \\
&= n e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} \left(e^{-\lambda(x-\theta)} - e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)}\right) + \left(x - 2\theta + \frac{2}{n}\right) n^2 e^{-2\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} \\
&\qquad + n e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} e^{-\lambda x} \left(e^{\lambda\theta} - e^{\lambda\left(x-\theta+\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= 2n e^{-\lambda\left(x-\frac{1}{n}\right)} + (x-2\theta) n^2 e^{-2\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

$*$ Si $2\theta - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 2\theta$,

$$g(x) = \int_{x-\theta}^{\theta} n^2 e^{-2\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} \, dt = (2\theta - x) n^2 e^{-2\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)}.$$

$*$ Si $x > 2\theta$, $g(x) = 0$.

Ainsi, la fonction obtenue étant continue presque partout, et par indépendance de X_n et Y_n, on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{f_{X_n+Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > 2\theta \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, \theta - \frac{1}{n}[\\ 2n\left(e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda x}\right) + (2\theta - \frac{2}{n} - x)\lambda^2 e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [\theta - \frac{1}{n}, \theta[, \\ 2n\left(e^{-\lambda\left(x-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda x}\right) + \lambda^2 e^{-\lambda x}\left(2\theta - \frac{2}{n} - x\right) & \text{si } x \in [\theta, 2\theta - \frac{2}{n}[\\ 2n e^{-\lambda\left(x-\frac{1}{n}\right)} + (x-2\theta) n^2 e^{-2\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} & \text{si } x \in [2\theta - \frac{2}{n}, 2\theta - \frac{1}{n}[\\ (2\theta - x) n^2 e^{-2\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} & \text{si } x \in [2\theta - \frac{1}{n}, 2\theta]. \end{cases}}$$

(f) Soit $x \in [0, \theta - \frac{1}{n}]$. On a :

$$G_n(x) = \int_0^x f_{X_n+Y_n}(t) \, dt = \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} \, dt.$$

Les fonctions $x \mapsto \lambda x$ et $x \mapsto -e^{-\lambda x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties amène :

$$G_n(x) = \Big[-\lambda t e^{-\lambda t} \Big]_0^x + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} = -\lambda x e^{-\lambda x} + (1 - e^{-\lambda x}).$$

On obtient donc :

$$\forall x \in [0, \theta - \frac{1}{n}], \quad \boxed{G_n(x) = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}}.$$

(g) Puisque X_n et Y_n convergent en loi respectivement vers U_1 et U_2, alors $X_n + Y_n$ converge en loi vers $U_1 + U_2$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x)$ converge vers $G(x)$. Soit $x \in [0, \theta[$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $x < \theta - \frac{1}{n} < \theta$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant N, \quad G_n(x) = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x},$$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$. Par conséquent :

$$\forall x \in [0, \theta[, \quad \boxed{G(x) = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}}.$$

(h) Pour tout $x \in [\theta - \frac{1}{n}, \theta]$,

$$0 \leqslant e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda x} \leqslant e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda\theta} \leqslant \frac{\lambda}{n},$$

d'après l'inégalité des accroissements finis, la dérivée de $x \mapsto e^{-\lambda x}$ étant majorée par λ sur $\mathbb{R}_+$. On a également

$$0 \leqslant \left(2\theta - \frac{2}{n} - x\right) \lambda^2 e^{-\lambda x} \leqslant 2\theta\lambda^2,$$

donc

$$0 \leqslant \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta} g_n(t) \, dt \leqslant \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta} \frac{2n\lambda}{n} \, dt + \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta} 2\theta\lambda^2 \, dt = \frac{1}{n}\left(2\lambda + 2\theta\lambda^2\right).$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, cette intégrale admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta} g_n(t)\ \mathrm{d}t = 0}.$$

Or, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$G_n(\theta) = G_n(\theta - \frac{1}{n}) + \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta} g_n(t)\ \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)}\left(1+\lambda\left(\theta-\frac{1}{n}\right)\right) + \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta} g_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi, l'intégrale tendant vers 0 en $+\infty$, et par continuité de l'exponentielle, on obtient :

$$\boxed{G(\theta) = \lim_{n\to+\infty} G_n(\theta) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}(1+\lambda\theta).}$$

Ainsi, d'après la question 2(g), $G(\theta) = \lim\limits_{x\to\theta^-} G(x)$, donc G est continue à gauche en θ. Comme elle est une fonction de répartition, elle est aussi continue à droite en θ. Ainsi, $\boxed{G \text{ est continue en } \theta.}$

(i) Soit $x \in]\theta, 2\theta[$. Il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $x < \theta - \frac{2}{n}$. Soit alors $n \geqslant N$. On a

$$\begin{aligned}
\int_\theta^x g_n(t)\ \mathrm{d}t &= \int_\theta^x 2n\left(\mathrm{e}^{-\lambda\left(t-\frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) + \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(2\theta - \frac{2}{n} - t\right)\ \mathrm{d}t \\
&= 2n\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)\cdot\frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\theta} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) - 2\theta\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}) + \lambda\left(\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}t\right]_\theta^x - \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t\right) \\
&= (\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda\theta})\left(-\frac{2n}{\lambda}(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1) - 2\theta\lambda + 1\right) + \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda\theta\mathrm{e}^{-\lambda\theta}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{2n}{\lambda}(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{n} = 2,$$

donc, après simplifications,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\theta^x g_n(t)\ \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-\lambda x}(1+2\theta\lambda-\lambda x) + \mathrm{e}^{-\lambda\theta}(1+\lambda\theta).$$

(j) On en déduit que

$$\begin{aligned}
G(x) &= G(\theta) - \mathrm{e}^{-\lambda x}(1+2\theta\lambda-\lambda x) + \mathrm{e}^{-\lambda\theta}(1+\lambda\theta) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\theta}(1+\lambda\theta) - \mathrm{e}^{-\lambda x}(1+2\theta\lambda-\lambda x) + \mathrm{e}^{-\lambda\theta}(1+\lambda\theta)
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $x \in]\theta, 2\theta[$,

$$\boxed{G(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}(1+\lambda(2\theta - x))}$$

(k) Comme U_1+U_2 prend des valeurs inférieures ou égales à 2θ, pour tout $x \geqslant 2\theta$, $G(\theta) = 1$. Ainsi, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}(1+\lambda x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}(1+\lambda(2\theta - x)) & \text{si } \theta \leqslant x < 2\theta \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2\theta. \end{cases}}.$$

On retrouve alors :

$$P(U_1+U_2 = 2\theta) = G(2\theta) - \lim_{x\to 2\theta^-} G(x) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda 2\theta}) = \boxed{\mathrm{e}^{-2\lambda\theta} = P(U_1+U_2 = 2\theta)}.$$

C'est bien l'expression trouvée précédemment.