

**DM n° 13 : Estimation – algèbre bilinéaire**

**Correction du problème 1 – (d'après EDHEC 2003)**

**Partie I –**

1. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur  $]0, 1[$ , et  $\forall x \in ]0, 1[, f'(x) = \frac{-(-(r+1))}{(1-x)^{r+2}} = \frac{(r+1)}{(1-x)^{r+2}}$ .

Une itération immédiate amène alors :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, 1[, f^{(k)}(x) = \frac{(r+1)(r+2) \cdots (r+k)}{(1-x)^{r+k+1}}$ .

Ainsi, pour tout  $k \geq 1$ , et tout  $x \in ]0, 1[, f^{(k)}(x) = \frac{(r+k)!}{r!} \cdot \frac{1}{(1-x)^{r+k+1}}$ .

2. On a :

$$\binom{n+r}{n} = \frac{(n+r)!}{n!r!} = \frac{1}{r!} n(n-1) \cdots (n-r+1),$$

et comme  $r$  est fixé, pour tout  $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, n-k \underset{+\infty}{\sim} n$ , donc  $\binom{n+r}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$

3. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n^{r-1}x^n = e^{(r-1)\ln n + n \ln x}.$$

Comme  $x \in ]0, 1[, \ln x < 0$ , et, par les croissances comparées,  $(r-1)\ln n = o(|n \ln x|)$ . Ainsi

$$(r-1)\ln x + n \ln x \underset{+\infty}{\sim} n \ln x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} n^{r-1}x^n = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$

4. Pour tout  $t \in [0, x], x-t \geq 0$ , et puisque  $x < 1, 1-t > 0$ . Ainsi,  $\varphi_x(t) \leq 0$ .

De plus, étant donné  $t \in [0, x]$

$$\varphi_x(t) - x = \frac{(x-t) - x(1-t)}{(1-t)} = \frac{t(x-1)}{1-t} \leq 0,$$

donc  $\varphi_x(t) \leq x$ . D'où l'encadrement :  $\forall t \in [0, x], 0 \leq \varphi_x(t) \leq x$ .

5. (a) La fonction  $k$  étant de classe  $n+1$ , la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

donc, d'après l'expression des dérivées de  $f$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(r+k)!}{r!k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{(n+1+r)!}{r!} \frac{1}{(1-t)^{n+2+r}} dt.$$

Il vient donc :  $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+r}{n} x^k + (n+r+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+2+r}} dt.$

- (b) On en déduit que :  $f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k = (n+r+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x \left( \frac{x-t}{1-t} \right)^n \cdot \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt.$

En utilisant l'encadrement de  $\varphi_x$  trouvé en 4, la positivité de  $\frac{1}{(1-t)^{r+2}}$  sur  $[0, x]$  et la positivité de l'intégrale, on obtient l'encadrement suivant :

$$(n+r+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x 0^n \cdot \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k \leq (n+r+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x x^n \cdot \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt$$

et donc  $0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k \leq (n+r+1) \binom{n+r}{n} x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$

- (c) Notons  $I$  l'intégrale obtenue dans la question précédente. Cette intégrale est indépendante de  $n$ . Ainsi, d'après les questions 2 et 3, lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$  :

$$(n+r+1) \binom{n+r}{n} x^n I \sim n \cdot \frac{n^r}{r!} x^n I = \frac{I}{r!} n^{r+1} x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k = 0$ ,

soit : 
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

## Partie II –

```
1. function ds7(n:integer;p:real):real;
   var i,j:integer;
   begin
     randomize;
     i:=0;
     j:=0;
     while j<n do
       begin
         i:=i+1;           {compteur de tirage}
         if random < p then j:=j+1; {compteur de succès}
       end;
     ds7:=i;
   end;
```

2. (a)  $X_1$  est ne nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes qu'il faut répéter pour obtenir le premier succès. Ainsi  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

(b) On en déduit, d'après le cours, que  $E(X_1) = \frac{1}{p}$ , et  $V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$ .

3. (a) Le  $n$ -ième succès peut être obtenu n'importe quand à partir du  $n$ -ième tirage. Comme  $X_n$  peut aussi prendre la valeur 0 si on n'a pas  $n$  succès, on obtient  $X_n(\Omega) = \{0\} \cup \llbracket n, +\infty \rrbracket$ .
- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Le nombre de succès obtenu lors des  $n+k-1$  premières épreuves suit une loi binomiale de paramètre  $(n+k-1, p)$ , donc la probabilité qu'on obtienne  $n-1$  succès au cours des  $n+k-1$  premières épreuves est :

$$P(A) = ds \binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^k.$$

où  $A$  est l'événement consistant à obtenir exactement  $n-1$  succès lors des  $n+k-1$  premières épreuves.

- (c) Soit  $S_\ell$  l'événement consistant à obtenir un succès au  $\ell$ -ième tirage.

Ainsi,  $[X_n = n+k]$  est réalisé si et seulement si on a obtenu exactement  $n-1$  succès lors des  $n+k-1$  premiers tirages, et qu'on obtient le  $n$ -ième succès lors du  $n+k$ -ième tirage, donc si et seulement si  $A$  et  $B_{n+k}$  donc réalisés. Ainsi,

$$[X_n = n+k] = A \cap S_{n+k}.$$

Comme  $A$  ne dépend que des  $n+k-1$  premiers tirages et que les tirages sont mutuellement indépendants,

$$P(X_n = n+k) = P(A)P(S_{n+k}) = \binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^k \cdot p$$

et donc : 
$$P(X_n = n+k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k.$$

(d) On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = p^n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-1+k}{n-1} (1-p)^k = p^n \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^n} = \frac{p^n}{p^n},$$

et on a bien :  $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = 1.}$

Or, puisque  $X_n$  est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans  $\{0\} \cup \llbracket n, +\infty \rrbracket$ ,

$$1 = P(X_n = 0) + \sum_{\ell=n}^{+\infty} P(X_n = \ell) = P(X_n = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = P(X_n = 0) + 1.$$

Ainsi,  $\boxed{P(X_n = 0) = 0.}$

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $k \in \mathbb{N}$ . On a :

$$(n+k) \binom{n+k-1}{n-1} = (n+k) \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = n \cdot \frac{(n+k)!}{n!k!} = n \binom{n+k}{n}.$$

Ainsi,  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, (n+k) \binom{n+k-1}{n-1} = n \binom{n+k}{n}.}$

(b) L'espérance de  $X_n$  existe si et seulement si la série de terme général  $(n+k)P(X_n = n+k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , converge. Or,

$$\forall k \in \mathbb{N}, (n+k)P(X_n = n+k) = (n+k) \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k = n \binom{n+k}{n} p^n (1-p)^k = \frac{n}{p} P(X_{n+1} = n+1+k).$$

Or, la série de terme général  $P(X_{n+1} = n+1+k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est convergente (et donc absolument convergente, puisqu'elle est à termes positifs), en tant que somme d'une loi d'une variable aléatoire. Ainsi,  $E(X_n)$  existe, et

$$E(X_n) = \frac{n}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = n+1+k) = \boxed{\frac{n}{p} = E(X_n).}$$

5. Soit  $Y_1 = X_1$ , et pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $Y_k = X_k - X_{k-1}$ .

(a) La mutuelle indépendance résulte du fait que lors d'une expérience donnée, les variables  $Y_1, \dots, Y_n$  dépendent de tirages distincts, et que les tirages sont indépendants. Plus précisément, le temps d'attente du  $n$ -ième succès à partir du  $n-1$ -ième ne dépend pas des succès précédents, les temps d'attentes précédents n'influent pas sur la séquence de succès et d'échec qui suivent le  $n-1$ -ième succès.

$Y_1$  est le temps d'attente du premier succès, donc  $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

Par ailleurs, si  $n \geq 2$ ,  $Y_n$  est le nombre de tirages nécessaires à partir du  $n-1$ -ième succès pour obtenir le succès suivant. La encore, cela correspond à la description d'une loi géométrique, donc  $\forall n \geq 2, Y_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

On obtient donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$

(b) De manière évidente, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$  (c'est une somme télescopique), donc :

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} = \boxed{\frac{n}{p} = E(X_n)}$$

Puisque les  $Y_i$  sont mutuellement indépendantes, on a aussi :

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1-p}{p^2} = \boxed{\frac{n(1-p)}{p^2} = V(X_n).}$$

6. (a) Pour tout  $n \geq 2$ , et tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{n-1}{n+k-1} \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+k-1)!}{(n+k-1)(n-1)!k!} = \frac{(n+k-2)!}{(n-2)!k!},$$

et donc :  $\boxed{\frac{n-1}{n+k-1} \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-2}{n-2}.}$

- (b) D'après le théorème de transfert, la variable  $\frac{n-1}{X_n-1}$  admet une espérance si et seulement si la série de terme général  $\frac{n-1}{n+k-1}P(X_n = n+k)$  converge absolument (attention à bien remplacer  $X_n$  par  $n+k$ , et non par  $k$ , les valeurs prises par  $X_n$  étant décrites ainsi). Or, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{n-1}{n+k-1}P(X_n = n+k) = \frac{n-1}{n+k-1} \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k = \frac{n+k-2}{n-2} p^n (1-p)^k = p P(X_{n-1} = n-1+k).$$

Or, la série de terme général  $P(X_{n-1} = n-1+k)$  est absolument convergente, d'après les propriétés des lois de variables aléatoires discrètes, donc  $\frac{n-1}{X_n-1}$  admet une espérance, et

$$E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) = p \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n-1} = n-1+k) \quad \text{soit:} \quad \boxed{E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) = p}.$$

7. (a) Soit  $n \geq 2$ . On a alors :  $\frac{n}{n+k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n+k-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n+k-1}$ .

$$\text{Ainsi : } \frac{n}{n+k} P(X_n = n+k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k).$$

Les deux séries étant à termes positifs, on en déduit que les séries de termes généraux respectifs  $\frac{n}{n+k} P(X_n = n+k)$  et  $\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n+k-1}$  sont de même nature. Or, la seconde est convergente, car égale, à un facteur constant près, à la série étudiée dans la question précédente, donnant l'existence et la valeur de  $E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)$ .

Ainsi, la série de terme général  $\frac{n}{n+k} P(X_n = n+k)$  est convergente, et, comme elle est à termes positifs,

elle est absolument convergente. Ainsi, d'après le théorème de transfert,  $\boxed{\frac{n}{X_n} \text{ possède une espérance}}$

- (b) On a :

$$\frac{n}{X_n} - \frac{n-1}{X_n-1} = \frac{nX_n - n - nX_n + X_n}{X_n(X_n-1)} = \frac{X_n - n}{X_n(X_n-1)}.$$

Or,  $X_n$  prend des valeurs supérieures ou égales à  $n$ , donc  $\frac{X_n - n}{X_n(X_n-1)}$  est une variable positive, mais non quasi-constante,  $X_n$  prenant des valeurs strictement supérieures à  $n$  avec une probabilité non nulle. Ainsi,

$$E\left(\frac{X_n - n}{X_n(X_n-1)}\right) > 0, \quad \text{puis:} \quad \boxed{E\left(\frac{n}{X_n}\right) > E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) = p}.$$

### Partie III –

1. (a)  $T_n$  et  $Z_n$  sont deux variables aléatoires qui s'écrivent comme fonction continue de variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_n$  (au sens de la partie II), formant un échantillon i.i.d. de la loi géométrique. De plus,  $X_n$  prenant des valeurs supérieures ou égales à  $n$ ,  $T_n$  et  $Z_n$  sont à valeurs dans  $[0, 1]$ , qui est l'intervalle dans lequel est défini le paramètre  $p$ .

Ainsi,  $\boxed{T_n \text{ et } Z_n \text{ sont des estimateurs de } p}.$

De plus, puisque  $E(T_n) = p$  d'après la question II-5(b),  $\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } p}.$

- (b) Soit  $n \geq 2$ . On a déjà montré l'existence de ces espérances, par la convergence des séries issues du théorème de transfert. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} E(Z_n) - E(T_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n}{n+k} P(X_n = n+k) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{n}{n+k} - \frac{n-1}{n+k-1} \right) P(X_n = n+k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(n+k)(n+k-1)} P(X_n = n+k), \end{aligned}$$

$$\text{et donc finalement : } \boxed{E(Z_n) - E(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(n+k)(n+k-1)} \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k}.$$

- (c) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n+k \geq n$ ,  $n+k-1 \geq n-1$  et  $k \leq n+k$ , donc  $0 \leq \frac{k}{(n+k)(n+k-1)} \leq \frac{n+k}{n(n-1)}$ . On en déduit que :

$$0 \leq E(Z_n) - E(T_n) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n+k}{n(n-1)} P(X_n = n+k) = \frac{n}{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) P(X_n = n+k).$$

En reconnaissant la série qui définit l'espérance de  $X_n$ , et en se rappelant que  $E(T_n) = p$ , on en déduit que :

$$0 \leq E(Z_n) - p \leq \frac{E(X_n)}{n(n-1)}.$$

- (d) Comme  $E(X_n) = \frac{n}{p}$ , on obtient, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$0 \leq E(Z_n) - p \leq \frac{1}{(n-1)p},$$

et d'après le théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = p$ . Donc  $Z_n$  est asymptotiquement sans biais en tant qu'estimateur de  $p$ .

2. Soit  $n \geq 3$ .

- (a) La variable  $\frac{1}{(X_n-1)(X_n-2)}$  admet une espérance ssi la série de terme général  $\frac{P(X=n+k)}{(n+k-1)(n+k-2)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , converge absolument. Or, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \frac{P(X=n+k)}{(n+k-1)(n+k-2)} &= \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1)(n+k-2)(n-1)!k!} p^n q^k \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{(n+k-3)!}{(n-3)!k!} p^n q^k = \frac{p^2}{(n-1)(n-2)} P(X_{n-2} = n-2+k). \end{aligned}$$

Par propriété des lois de v.a.r.d., la série de terme général  $\frac{1}{(n-1)(n-2)} p^2 P(X_{n-2} = n-2+k)$  est convergente (et même absolument convergente, par positivité des termes), donc  $\frac{1}{(X_n-1)(X_n-2)}$  admet une espérance, et

$$E\left(\frac{1}{(X_n-1)(X_n-2)}\right) = \frac{p^2}{(n-1)(n-2)} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n-2} = n-2+k),$$

et enfin :

$$E\left(\frac{1}{(X_n-1)(X_n-2)}\right) = \frac{p^2}{(n-1)(n-2)}.$$

- (b) D'après la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned} V\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) &= E\left(\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)\right) - E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)^2 \\ &= (n-1)^2 E\left(\frac{1}{(X_n-1)(X_n-1)}\right) - p^2 \\ &\leq (n-1)^2 E\left(\frac{1}{(X_n-1)(X_n-2)}\right) - p^2 = (n-1)^2 \frac{p^2}{(n-1)(n-2)} - p^2, \end{aligned}$$

d'où :  $V\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) \leq \frac{p^2}{n-2}.$

- (c)  $T_n$  étant d'espérance  $p$ , on a, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$0 \leq P(|T_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{p^2}{\varepsilon^2(n-2)}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^2}{\varepsilon^2(n-2)} = 0$ , on déduit du théorème d'encadrement que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - p| > \varepsilon) = 0,$$

donc  $(T_n)$  est un estimateur convergent de  $p$ .

3. (a) L'inégalité  $\frac{n-1}{X_n-1} \leq \frac{n}{X_n}$  a déjà été prouvée lors de la question II-6(b).

De plus,  $X_n \geq X_n - 1 \geq 0$ , donc  $\frac{n}{X_n} \leq \frac{n}{X_n - 1}$ .

On a bien l'encadrement :  $\frac{n-1}{X_n-1} \leq \frac{n}{X_n} \leq \frac{n}{X_n-1}$ .

- (b) Les trois termes de l'encadrement précédent étant positifs, on a :

$$\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)^2 \leq \left(\frac{n}{X_n}\right)^2 \leq \left(\frac{n}{X_n-1}\right)^2.$$

Ainsi,

$$E\left(\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)^2\right) \leq E\left(\left(\frac{n}{X_n}\right)^2\right) \leq E\left(\left(\frac{n}{X_n-1}\right)^2\right) = \frac{n^2}{(n-1)^2} E\left(\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)^2\right).$$

Or, une variance étant toujours positive, la question 2(b) permet d'affirmer que  $V\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)$  tend vers 0.

Puisque  $E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) = p$ , on déduit alors de la formule de König-Huygens que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)^2\right) = p^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{(n-1)^2} E\left(\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)^2\right)\right) = p^2.$$

D'après le théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n^2) = p \lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\left(\frac{n}{X_n}\right)^2\right) = p^2$ .

D'après la question 1(d),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = p$ , donc, d'après la formule de König-Huygens,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Z_n) = 0$

- (c) D'après un corollaire de l'inégalité de Markov, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$0 \leq P(|Z_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{E((Z_n - p)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{r_{Z_n}(p)}{\varepsilon^2} = \frac{V(Z_n) + b_{Z_n}(p)}{\varepsilon^2}.$$

D'après les questions 1(d) et 3(b),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(Z_n) + b_{Z_n}(p)}{\varepsilon^2} = 0$ , donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - p| > \varepsilon) = 0.$$

Ainsi,  $Z_n$  est un estimateur convergent de  $p$ .

## Correction du problème 2 – (d'après Lyon 2003)

### Partie I – Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

- Puisque  $f$  est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, la bijectivité de  $f$  équivaut à son injectivité. Ainsi,  $f$  étant non inversible,  $f$  n'est pas injective, donc  $\text{Ker}(f) \neq 0$ . On en déduit donc que  $0$  est valeur propre de  $f$ . Comme  $f$  est diagonalisable en tant qu'endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, si  $f$  n'admettait pas d'autre valeur propre que 0,  $f$  serait une homothétie de rapport 0, donc l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas. Ainsi,  $f$  admet au moins une valeur propre non nulle.
- Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres de  $f$ , telles que  $\lambda \neq \mu$ . Soit  $x \in E_\lambda$  et  $y \in E_\mu$ . Alors

$$\langle f(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, f(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Comme  $f$  est symétrique, on a  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ . On en déduit que :

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

Comme  $\lambda \neq \mu$ , il en résulte que  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Cela étant vrai pour tout  $x \in E_\lambda$  et tout  $y \in E_\mu$ , on en déduit que  $E_\lambda \perp E_\mu$ .

3. Soit  $x \in \text{Im}(f)$  et  $y \in \text{Ker}(f)$ . Alors il existe  $z \in E$  tel que  $x = f(z)$ . On a donc, par symétrie de  $f$  :

$$\langle x, y \rangle = \langle f(z), y \rangle = \langle z, f(y) \rangle = \langle z, 0 \rangle = 0.$$

Ainsi, cela étant vrai pour tout  $x$  de  $\text{Im}(f)$  et tout  $y$  de  $\text{Ker}(f)$ , on en déduit que  $\text{Im } f \perp \text{Ker } f$ . En particulier,  $\text{Im } f \subset (\text{Ker } f)^\perp$ .

De plus, comme  $E$  est de dimension finie,  $(\text{Ker } f)^\perp$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ , donc

$$\dim(\text{Ker } f)^\perp = n - \dim \text{Ker } f.$$

De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } f = n - \dim \text{Ker } f.$$

Ainsi, on a l'inclusion  $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker } f)^\perp$ , avec l'égalité des dimensions, donc  $\text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp$ .

Ainsi,  $\boxed{\text{Im } f \text{ est le supplémentaire orthogonal de } \text{Ker } f.}$

4. Soit  $x$  un vecteur de  $E$ .

(a) Puisque  $f$  est diagonalisable (en tant qu'endomorphisme symétrique d'un espace euclidien), la somme (directe) de ses espaces propres est égale à  $E$  tout entier :

$$E = E_f(0) \oplus E_f(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_f(\lambda_k).$$

Ainsi, par définition des sommes directes, pour tout  $x$  de  $E$ , il existe un unique  $(k+1)$ -uplet  $(x_0, \dots, x_k)$  de  $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$  tel que  $\boxed{x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k}$ .

(b) Posons  $\lambda_0 = 0$ . Soit  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$  tel que  $i \neq j$ ,  $E_f(\lambda_i) \perp E_f(\lambda_j)$ , donc, puisque  $x_i \in E_f(\lambda_i)$ ,  $p_j(x_i) = 0$ . Par conséquent,

$$p_j(x) = \sum_{i=0}^k p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j,$$

puisque  $x_j \in E_f(\lambda_j)$ . Donc  $\boxed{p_j(x) = x_j}$

(c) Ainsi, pour tout  $x \in E$ , on a une décomposition :

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_k(x), \quad \text{donc:} \quad p_0 + p_1 + \cdots + p_k)(x) = x.$$

Par conséquent,  $\boxed{p_0 + p_1 + \cdots + p_k = \text{id}_E}$ .

5. (a) Soit  $(i, j) \in \llbracket 0, k \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , et soit  $x \in E$ , et  $x = x_0 + \cdots + x_k$  la décomposition de  $x$  décrite dans la question 4(a). Alors, d'après la question 4(b) :

$$p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j) = 0,$$

puisque  $i \neq j$ , d'après un argument donné ci-dessus. Ainsi, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, k \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ ,

$$\boxed{p_i \circ p_j = 0.}$$

(b) Soit  $x \in E$ , et  $x = x_0 + \cdots + x_k$  sa décomposition décrite en 4(a). Alors,  $f$  étant linéaire :

$$f(x) = f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_k).$$

Or,  $x_0 \in E_f(0) = \text{Ker}(f)$ , donc  $f(x_0) = 0$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $x_i \in E_f(\lambda_i)$ , donc  $f(x_i) = \lambda_i x_i$ . Ainsi :

$$f(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = \lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_k p_k(x),$$

d'après la question 4(b). Cette égalité étant vraie pour tout  $x$  de  $E$ , on en déduit que

$$\boxed{f = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k.}$$

(c) Soit  $q = p_0$  le projecteur orthogonal sur  $\text{Ker } f$ . Comme  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$  sont supplémentaires orthogonaux,  $p$  et  $q$  sont des projecteurs associés. Ainsi,

$$p = \text{id} - q = p_0 + \cdots + p_k - p_0 = \boxed{p_1 + \cdots + p_k = p.}$$

6. (a) On a, d'après la question 5(b) et la définition de  $f^\sharp$  :

$$f \circ f^\sharp = \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \right) \circ \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} p_i \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2} \lambda_i \frac{1}{\lambda_j} p_i \circ p_j,$$

puisque les  $p_i$  sont tous linéaires. De plus les compositions  $p_i \circ p_j$  sont nulles sauf si  $i = j$ , et dans ce cas, puisque  $p_i$  est un projecteur,  $p_i \circ p_i = p_i$ . Ainsi

$$f \circ f^\sharp = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{1}{\lambda_i} p_i = \sum_{i=1}^k p_i = p,$$

d'après la question 5(c). D'où l'égalité  $\boxed{f \circ f^\sharp = p.}$

- (b) Soit  $(x, y) \in E^2$ . L'égalité  $f(x) = p(y)$  est vérifiée si et seulement si  $f(x) - f \circ f^\sharp(y) = 0$  (d'après la question précédente), donc si et seulement si  $f(x - f^\sharp(y)) = 0$ , donc si et seulement si  $x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f$ .

7. Soit  $y$  un vecteur de  $E$ .

- (a) Soit  $x \in E$ . Puisque  $f(z)$  décrit  $\text{Im}(f)$  lorsque  $z$  décrit  $E$ ,  $\inf_{z \in E} \|f(z) - y\| = \inf_{t \in \text{Im } f} \|t - y\|$ .

Soit  $t \in \text{Im}(f)$ . Alors  $\|t - y\| = \|t - p(y) + p(y) - y\|$ . Or,  $t - p(y) \in \text{Im}(f)$  et  $p(y) - y \in (\text{Im } f)^\perp$ . Donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|t - y\|^2 = \|t - p(y)\|^2 + \|p(y) - y\|^2 \geq \|t - p(y)\|^2,$$

l'inégalité étant stricte si  $t \neq p(y)$ .

Ainsi, la borne inférieure est un minimum, pris en  $p(y)$ , et seulement en  $p(y)$ .

Par conséquent, puisque  $f(x) \in \text{Im}(f)$ ,  $f(x)$  réalise le minimum de  $\|t - y\|$  si et seulement si  $f(x) = p(y)$ , d'où, d'après la question 6(b) :

$\boxed{x \text{ réalise le minimum lorsque } z \text{ décrit } E \text{ de } \|f(z) - y\| \text{ si et seulement si } x - f^\sharp(y) \in \text{Ker}(f).}$

Remarquez que cet argument n'est rien d'autre que de dire que le projeté orthogonal est le vecteur de meilleure approximation !

- (b) • Soit  $x = f^\sharp(y)$ . Alors  $0 = x - f^\sharp(y) \in \text{Ker}(f)$ , donc  $x$  réalise le minimum de  $\|f(z) - y\|$ .  
 • De plus, soit  $x'$  un autre vecteur vérifiant  $\|f(x') - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|$ . Alors  $x' - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f$ . Il existe donc  $z \in \text{Ker } f$  tel que  $x' = f^\sharp(y) + z$ . Comme  $f^\sharp(y) \in \text{Im } f$  et  $z \in \text{Ker}(f)$  et que  $\text{Im } f \perp \text{Ker } f$ , la relation de Pythagore amène

$$\|x'\|^2 = \|f^\sharp(y)\|^2 + \|z\|^2 > \|f^\sharp(y)\|^2.$$

Cette dernière inégalité est stricte, car  $x' \neq f^\sharp(y)$ , donc  $z \neq 0$ .

Ainsi, tous les autres vecteurs  $x'$  vérifiant cette relation sont de norme strictement supérieure à  $\|f^\sharp(y)\|$ .

Ainsi  $\boxed{f^\sharp(y) \text{ est le vecteur } x \text{ de plus petite norme vérifiant } \|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|.}$

## Partie II – Application à un exemple

1. La matrice  $A$  est symétrique, donc la base  $\mathcal{B}$  étant orthonormale, l'endomorphisme  $f$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A$  est un  $\boxed{\text{endomorphisme symétrique}}.$

La matrice  $A$  est non nulle et non inversible (car ses colonnes 2 et 4 sont liées).

Ainsi,  $\boxed{f \text{ est non nulle et non inversible}}.$

2. On peut faire le calcul par réduction de Gauss de la matrice  $A - \lambda I_4$  :  $\lambda$  est valeur propre si et seulement une réduite de Gauss est non inversible. On trouve :

$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 + (3-\lambda)L_1 \\ L_4 &\leftrightarrow L_4 + (1-\lambda)L_2 \end{aligned} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 - 1 \end{pmatrix} = M_\lambda \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  si et seulement si  $(3-\lambda)^2 = 1$ , donc  $\lambda = 2$  ou  $\lambda = 4$ , ou bien si  $(1-\lambda)^2 = 1$ , donc si  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 2$ .

Par conséquent  $\boxed{\text{Sp}(f) = \{0, 2, 4\}}$ .

On pouvait trouver cela sans quasiment aucun calcul, en remarquant que :

- puisque  $A$  est non inversible  $0 \in \text{Sp}(f)$ , et comme  $\text{rg}(A) = 3$ , la dimension de  $E_0$  est 1.
- en essayant de comprendre la matrice  $A - \lambda I_4$  pour des valeurs particulières simples de  $\lambda$ , on se rend compte très facilement que  $2 \in \text{Sp}(f)$  et que l'espace propre associé est de dimension 2.
- Par ailleurs,  $f$  étant un endomorphisme symétrique, il est diagonalisable. Il existe donc une (et une seule) valeur propre supplémentaire, l'espace propre associé étant alors de dimension 1. Donc  $f$  admet bien 3 valeurs propres distinctes.
- De plus, on peut retrouver la valeur de cette troisième valeur propre (même si non explicitement demandé dans cette question), en utilisant le résultat démontré dans l'exercice : deux matrices semblables sont de même trace. Ainsi, la trace de  $A$  est égale à la trace de la matrice de  $f$  dans une base de diagonalisation, donc  $8 = 0 + 2 + 2 + \lambda$ , et donc  $\lambda = 4$  (remarquez que pour cet argument, on a besoin de connaître la dimension des espaces propres).

En reprenant les notations de l'énoncé, on a donc  $\boxed{\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 4}$ .

3. D'après la question I-5(b),

$$f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 2p_1 + 4p_2.$$

En exprimant cette relation matriciellement, relativement à la base  $\mathcal{B}$ , il vient :  $\boxed{A = 2M_1 + 4M_2}$ .

4. (a) La matrice  $M_4$  obtenue après pivot de Gauss sur la matrice  $A - 4I_4$  est  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ . Cette

matrice est de rang 3, donc, d'après le théorème du rang,  $\boxed{E_f(\lambda_2) \text{ est de dimension 1}}$ .

De plus, les colonnes de cette matrice vérifient  $C_1 - C_3 = 0$ , donc  $w_2$  représenté dans la base  $\mathcal{B}$  par la

colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est dans  $E_f(\lambda_2)$ , et cet espace étant de dimension 1, on en obtient une base. On pose alors :

$$\boxed{v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 - b_3)}$$

(b) Le vecteur  $v_2$  est un vecteur non nul, unitaire de  $E_f(\lambda_2)$ , qui est de dimension 1. Ainsi,  $(v_2)$  est une base orthonormale de  $E_f(\lambda_2)$ . La formule du projeté orthogonale amène alors :

$$\forall x \in E, \quad \boxed{p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2}.$$

(c) On a donc :

- $p_2(b_1) = \frac{1}{2}(b_1 - b_3)$
- $p_2(b_2) = 0$
- $p_2(b_3) = -\frac{1}{2}(b_1 - b_3)$
- $p_2(b_4) = 0$ .

Ainsi, on obtient :

$$M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Par conséquent,

$$M_1 = \frac{1}{2}A_2 - 2M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice associée à  $f^\sharp$  est, par définition :

$$B = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice associée à  $f^\sharp$  est

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$