DM n° 5 : Intégrales impropres et un peu d'algèbre

Correction de l'exercice 1 – (Exercice technique)

1. (a) La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^3) \left(\sin \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale I_1 a deux impropriétés en 0 et en $+\infty$.
- Au voisinage de 0, $\sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ est borné, alors que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Par conséquent,

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par ailleurs, $\ln(1 + x^3) \underset{0}{\sim} x^3$, donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{\sqrt{x}} = -x^{\frac{5}{2}}.$$

Ainsi, f admet une limite nulle en 0, et l'intégrale est faussement impropre en 0, donc convergente en la borne 0.

- Au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0, donc, d'après le développement limité du sinus,

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

De plus, $\ln(1 + x^3) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x^3) = 3 \ln x$, donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Par conséquent,

$$x^{\frac{5}{4}} f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}},$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

d'après les croissances comparées. Ainsi,

$$|f(x)| = o\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right),$$

et, les fonctions ci-dessus étant positives, I_1 converge absolument, donc converge en sa borne $+\infty$, par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre $\frac{5}{4} > 1$.

Ainsi, I_1 est convergente.

- (b) Étude assez amusante, car il y a une impropriété en un point que l'on ne sait pas expliciter...

Ici, la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x} + \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue, de limites $-\infty$ et $+\infty$ en 0 et $+\infty$. Ainsi, g induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, g s'annule en exactement un point a de $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, puisque $g(1) > 0$, $a \in]0, 1[$, ainsi, $\cos(a) > 0$.

La fonction $f : \frac{\cos x}{\sqrt{x + \ln x}}$ est alors continue sur $]0, a[\cup]a, +\infty[$, donc I_2 admet 3 impropriétés en 0, a et $+\infty$.

On étudie en priorité la borne a , en essayant de trouver un équivalent de f en a (on pourrait montrer la convergence aux deux autres impropriétés, par un argument de type Dirichlet en $+\infty$, et par comparaison à une intégrale de Riemann en 0)

On commence par déterminer un équivalent de g , en utilisant la définition de la dérivabilité : la fonction g est dérivable sur son domaine, donc notamment en a , d'où :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{1} = g'(a).$$

Or, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

donc $g(a) > 0$, d'où

$$g(x) \underset{a}{\sim} (x - a)g'(a).$$

$$\text{Ainsi } f(x) \underset{a}{\sim} \frac{\cos a}{(x - a)g'(a)}.$$

On obtient alors la divergence de $\int_a^1 f(x) dx$, par comparaison par équivalence à l'intégrale de Riemann

divergente $\int_a^1 \frac{dx}{x - a}$, les fonctions étant positives au voisinage à droite de a .

Il est alors inutile d'étudier les autres bornes

Ainsi, I_2 diverge.

2. (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(3 + 2x + x^2)}{(x + 1)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale I_3 admet une seule impropriétés en $+\infty$.

On pose les deux fonctions u et v , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, définies par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u(x) = \ln(3 + 2x + x^2) \quad \text{et} \quad v(x) = -\frac{1}{x + 1}.$$

On a alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u'(x) = \frac{2 + 2x}{3 + 2x + x^2} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}.$$

Par ailleurs,

$$\ln(3 + 2x + x^2) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x^2) = 2 \ln x,$$

$$\text{donc } u(x)v(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x}.$$

Ainsi, d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$.

D'après le théorème d'intégration par parties pour les intégrales impropres, on peut donc affirmer que I_3 est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{2x + 2}{(x + 1)(x^2 + 2x + 3)} dx$, c'est-à-dire que $2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$.

Or, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, les deux fonctions sont positives et continues sur $[1, +\infty[$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge

en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre 2 en $+\infty$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$ converge, donc aussi I_3 , et on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[u(x)v(x) \right]_0^{\lim_{+\infty}} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} \\ &= \ln 3 + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2} \\ &= \ln 3 + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \\ &= \ln 3 + \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \ln 3 + \sqrt{2} \left[\text{Arctan} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{\lim_{+\infty}} = \boxed{\ln 3 + \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = I_3}. \end{aligned}$$

- (b) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\text{Arctan}(\sqrt{x})}}{\sqrt{x(x+1)}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc I_4 est impropre en 0 et en $+\infty$.
 On effectue le changement de variable $y = \sqrt{x}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissant, et bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, et tel que $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, d'après le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres, I_4 est de même nature que $\int_0^{+\infty} 2 \frac{\sqrt{\text{Arctan } y}}{y^2 + 1} dy$. Cette intégrale n'a plus qu'une impropriété en $+\infty$. Or, une primitive de $g : y \mapsto 2 \frac{\sqrt{\text{Arctan } y}}{y^2 + 1}$ est $G : y \mapsto 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (\text{Arctan}(y))^{\frac{3}{2}}$.
 La fonction G admettant une limite finie en $+\infty$, $\int_0^{+\infty} 2 \frac{\sqrt{\text{Arctan } y}}{y^2 + 1} dy$ converge, donc aussi I_4 , et

$$I_4 = \int_0^{+\infty} 2 \frac{\sqrt{\text{Arctan } y}}{y^2 + 1} dy = \left[\frac{4}{3} (\text{Arctan}(x))^{\frac{3}{2}} \right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = I_4}$$

3. (a) La fonction $f : x \mapsto e^{-4x^2+2x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc I_5 est impropre en $-\infty$ et $+\infty$ uniquement.
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-4x^2+2x-2} = e^{-(2x-\frac{1}{2})^2-\frac{7}{4}} = e^{-\frac{7}{4}} e^{-(2x-\frac{1}{2})^2}.$$

On pose le changement de variable $y = 2x - \frac{1}{2}$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales I_5 et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{7}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{2}$ sont de même nature, donc convergentes (on reconnaît une intégrale de Gauss). Ainsi

$$I_5 = \frac{e^{-\frac{7}{4}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \boxed{\frac{e^{-\frac{7}{4}} \sqrt{\pi}}{2} = I_5}$$

- (b) La fonction $t \mapsto t^3 e^{-\frac{t}{3}+2}$ est continue sur $[3, +\infty[$, donc I_6 admet une impropriété en $+\infty$ uniquement.
 On effectue le changement de variable $u = \frac{t}{3} - 1$ (le $\frac{1}{3}$ sert à nous ramener à un terme e^{-u} , et le -1 sert à nous ramener à un intervalle d'intégration égal à $[0, +\infty[$). Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $[3, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales I_6 et $\int_0^{+\infty} (3u+3)^3 e^{-u+1} 3 du$ sont de même nature, donc convergente, puisque dans cette dernière on reconnaît, en utilisant la formule du binôme et en sortant les termes constants, une combinaison linéaire d'intégrales Γ convergentes. Ainsi :

$$\begin{aligned} I_6 &= 3^4 e \int_0^{+\infty} (u+1)^3 e^{-u} du \\ &= 81e \int_0^{+\infty} (u^3 + 3u^2 + 3u + 1) e^{-u} du \\ &= 81e(\Gamma(4) + 3\Gamma(3) + 3\Gamma(2) + \Gamma(1)) = 81e(3! + 3 \cdot 2! + 3 \cdot 1! + 0!) \\ &= 81 \cdot 16e = \boxed{1296e = I_6} \end{aligned}$$

- (c) La fonction $f : t \mapsto t^7 e^{-2t^2}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc I_7 n'admet qu'une impropriété en $+\infty$.
 On effectue le changement de variable $u = 2t^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $[2, +\infty[$ sur $[8, +\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, l'intégrale I_7 est de même nature que $\int_8^{+\infty} \frac{u^3}{32} e^{-u} du$, donc convergente, puisqu'on reconnaît une intégrale partielle Γ de paramètre 4.
 On effectue un second changement de variable $x = u - 8$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $[8, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, puisqu'on sait maintenant que les intégrales convergent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^{+\infty} \frac{(x+8)^3}{32} e^{-(x+8)} dx \\ &= \frac{e^{-8}}{32} (\Gamma(4) + 3 \cdot 8\Gamma(3) + 3 \cdot 8^2\Gamma(2) + 8^3\Gamma(1)) \\ &= e^{-8} \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{2} + 6 + 16 \right) \\ &= \boxed{e^{-8} \left(23 + \frac{11}{16} \right) = I_7}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 –

1. En effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - bL_1$, on obtient :

$$\text{rg}(M_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ b & 1-ab & b \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1-ab & b \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1-ab & b \end{pmatrix}$ est non nulle, elle est au moins de rang 1. Elle est de rang 1 si et seulement si elle est non inversible, c'est-à-dire si son déterminant est nul, donc si

$$0 = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1-ab & b \end{pmatrix} = ab - (1-ab) = 2ab - 1.$$

Ainsi :

$$\text{rg}(M_1) = \begin{cases} 2 & \text{si } ab = \frac{1}{2} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Si $ab = \frac{1}{2}$, a est non nul, et donc $b = \frac{1}{2a}$, donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ \frac{1}{2a} & 1 & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

L'image est engendrée par les colonnes, et est de dimension 2. Comme les deux premières colonnes sont non colinéaires, à cause du 2e coefficient (donc elles forment une famille libre), on peut dire qu'elles forment une base de $\text{Im}(M_1)$, et en multipliant le premier vecteur par $2a \neq 0$:

$$\left(\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_1)$$

Par ailleurs, d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}(M_1) = 1$. Or, les colonnes de M_1 vérifient $aC_1 - C_2 + aC_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ est dans le noyau de M_1 . Comme ce noyau est de dimension 1, on en déduit :

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker}(M_1)$$

- Si $ab \neq \frac{1}{2}$, $\text{Im}(M_1)$ est égal à $\mathbb{R}^3$ tout entier, et la base canonique (e_1, e_2, e_3) est une base de $\text{Im}(M_1)$.

Le noyau vaut dans ce cas $\{0\}$, et $\emptyset$ est une base de $\text{Ker}(M_1)$.

2. En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - bL_1$, on obtient

$$\text{rg}(M_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1-ab & b-ab \\ 0 & a-ab & 1-ab \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-ab & b-ab \\ a-ab & 1-ab \end{pmatrix}.$$

- $\text{rg} \begin{pmatrix} 1-ab & b-a^2 \\ a-b^2 & 1-ab \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $ab = 1$, $b = a^2$ et $a = b^2$. Il vient donc $a^3 = 1$, et comme $a \in \mathbb{R}$,

la seule solution est $a = 1$, puis $b = 1$. Ainsi, $\text{rg}(M_2) = 1$ si et seulement si $a = b = 1$.

La matrice M_2 est alors égale à $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

* une base de l'image est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

* une base du noyau est $\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right)$ (rechercher 2 relations entre les colonnes)

* $\text{rg} \begin{pmatrix} 1-ab & b-a^2 \\ a-b^2 & 1-ab \end{pmatrix} = 1$ si et seulement si $(a, b) \neq (1, 1)$, et $\det \begin{pmatrix} 1-ab & b-a^2 \\ a-b^2 & 1-ab \end{pmatrix} = 0$, donc

$$(1-ab)^2 - (b-a^2)(a-b^2) = 0 \quad \text{donc:} \quad 1 - 3ab + a^3 + b^3 = 0.$$

En se servant de l'identité donnée dans l'énoncé (qu'on vérifie facilement en développant le terme de droite), cette condition devient :

$$\begin{aligned} 0 &= (a+b+1)(1-b-a+b^2+a^2-ab) = (a+b+1) \left(\left(a - \frac{1}{2}(b+1) \right)^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{3}{2}b + 32 \right) \\ &= (a+b+1) \left(\left(a - \frac{1}{2}(b+1) \right)^2 + \frac{3}{4}(b^2 - 2b + 2) \right) \\ &= (a+b+1) \left(\left(a - \frac{1}{2}(b+1) \right)^2 + \frac{3}{4}((b-1)^2 + 1) \right) \\ &= (a+b+1) \left(\left(a - \frac{1}{2}(b+1) \right)^2 + \frac{3}{4}(b-1)^2 + \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

Le second membre du produit est donc toujours strictement positif, et donc $\text{rg}(M_2) = 2$ ssi $a+b+1=0$ (équation qui exclut automatiquement le cas $a=b=1$).

Dans ce cas, la matrice M_2 se réécrit

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1-a & a \\ a & 1 & -1-a \\ -1-a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

– Le noyau est de dimension 1 (théorème du rang), et les colonnes de la matrice vérifient $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

On en déduit qu'une base de $\text{Ker}(M_2)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

– La relation $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ montre que $C_3 \in \text{Vect}(C_1, C_2)$, donc

$$\text{Im}(M_2) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_2),$$

et comme $\dim \text{Im}(M_2) = \text{rg}(M_2) = 2$, cette famille génératrice est une base.

Ainsi, une base de $\text{Im}(M_2)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right)$.

– Dans tous les autres cas, M_2 est de rang 3, une base de l'image est par exemple la base canonique, et $\text{Ker}(M_2)$ est réduit à $\{0\}$, dont une base est $\emptyset$.

Correction du problème – (d'après EM Lyon 2006)

Partie I – Préliminaires

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les croissances comparées, t^2 étant de limite $+\infty$ en $+\infty$, on a

$$e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{(t^2)^{1+\frac{n}{2}}} \right) \quad \text{donc:} \quad t^n e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Remarque : être très précis dans une question de ce type, qui est une application très directe du cours !

(b) La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$. On a donc deux improprietés en $-\infty$ et $+\infty$. De plus, cette fonction étant paire si n est paire, et impaire si n est impaire, l'intégrale sera de même nature en chacune des deux bornes. Il suffit donc de montrer la convergence pour la borne $+\infty$.

Or, d'après la question 1(a),

$$t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ au voisinage d'une borne infinie, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge, d'après le théorème de comparaison d'intégrales par négligeabilité au voisinage d'une borne, les fonctions étant positives au voisinage de cette borne, puis que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge, d'après l'argument qui précède.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, ainsi, P est une combinaison linéaire (finie) de monômes X^n , donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ est une combinaison linéaire d'intégrales telles que dans la question 1(b), toutes convergentes. Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ est convergente.

3. On a :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

(il s'agit de l'intégrale de Gauss). De plus, l'intégrale I_1 étant convergente, on peut faire son calcul directement sur l'intégrale impropre, toutes les limites que nous sommes amenés ainsi à écrire existant :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} = 0.$$

On aurait aussi pu dire directement que la fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est impaire, et l'intégrale convergente, d'où le résultat.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt.$$

On pose les fonctions u et v , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = t^{n+1}, \quad \varepsilon u'(t) = (n+1)t^n, \quad v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}, \quad v'(t) = te^{-t^2}.$$

De plus, d'après les croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0.$$

Ainsi, on peut faire une intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et on obtient :

$$I_{n+2} = \left[u(t)v(t) \right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} + \frac{n+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{n+1}{2} I_n.$$

5. Soit on propage l'égalité $I_1 = 0$ de deux en deux, en utilisant la relation de récurrence ci-dessus, soit on constate directement qu'il s'agit d'intégrales convergentes de fonctions impaires.

6. Soit, pour tout p dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(p)$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi}$.

Pour $p = 0$, on a bien

$$\frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi} = \frac{1}{1 \cdot 1} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} = I_0.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Soit $p \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vrai. Alors, d'après la question I-4,

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p)!(2p+1)}{2 \cdot 2^{2p}p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p)!(2p+1)(2p+2)}{2^2(p+1) \cdot 2^{2p}p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \sqrt{\pi}$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est aussi vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ entraîne $\mathcal{P}(p+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout p dans $\mathbb{N}$.

7. La seule subtilité est de bien distinguer les valeurs paires et les valeurs impaires du paramètre. Ainsi, on obtient la fonction suivante :

```
function In(n:integer):real;

var I:real;
    m,k:integer;

begin
  if (n mod 2)=1
  then
    In:=0
  else
    begin
      m:=n div 2;
      I:= sqrt(pi);
      for k:= 1 to m do
        I:= (2*k-1)*I/2;
      In:=I;
    end;
  end;
end;
```

Partie II – Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad |t \cos(xt)e^{-t^2}| \leq |t|e^{-t^2} = te^{-t^2}.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent absolument, donc convergent, par comparaison avec les intégrales convergentes I_0 et I_1

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée seconde est $-\sin$, dont la valeur absolue est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et λ , on a :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2} \cdot 1 = \frac{\lambda^2}{2}.$$

3. (a) Soit maintenant $h \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, et on pose $\lambda = ht$ et $a = xt$ dans l'inégalité de la question précédente. En divisant par la quantité positive $|h|$ et en la multipliant par e^{-t^2} , on obtient alors :

$$\left| \frac{\sin(xt + ht)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \neq 0$, en utilisant la linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales impropres étant convergentes) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| &= \left| \frac{\int_0^{+\infty} \sin((x+h)t)e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt}{h} - \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right) dt \right| \end{aligned}$$

Or, on a vu que

$$\left| \frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2},$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2} dt$ est convergente (il s'agit de $\frac{|h|}{2} I_2$), donc, par comparaison,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right) dt$$

est absolument convergente, et on peut donc utiliser l'inégalité triangulaire. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| dt \\ &\leq \frac{|h|}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{|h|}{2} \cdot I_2. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est de limite nulle lorsque h tend vers 0, donc, d'après le théorème de majoration,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

(b) Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le taux d'accroissement en x de S admet une limite en 0, égale à $C(x)$. Donc S est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = C(x).$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons une intégration par parties sur $C(x)$, en posant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u(t) = \cos(xt), \quad u'(t) = -x \sin(xt), \quad v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2}, \quad v'(t) = t e^{-t^2}.$$

On a une seule impropreté en $+\infty$, et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \cos(xt)e^{-t^2} = 0.$$

Ainsi, on peut faire l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et on obtient :

$$C(x) = \left[u(t)v(t) \right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \cdot S(x).$$

(b) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x)$. La fonction g est dérivable en tant que composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= x e^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}} S'(x) \\ &= x e^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}} C(x) \\ &= x e^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x) \right) \\ &= e^{\frac{x^2}{4}}. \end{aligned}$$

Ainsi, g est une primitive de $x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$. De plus,

$$S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0)e^{-t^2} dt = 0, \quad \text{donc:} \quad g(0) = 0.$$

Ainsi, g est la primitive de $x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ s'annulant en 0, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = g(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2}{4}} dx.$$

(c) On en déduit, puisque l'exponentielle ne s'annule pas, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt,$$

puis, en utilisant la question II-4(a) :

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Partie III – Obtention d'un développement limité

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, les deux seules impropriétés sont en $+\infty$ et $-\infty$.
De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} \leq e^{-t^2},$$

et l'intégrale $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente. Donc, par théorème de comparaison de la nature d'intégrales de fonctions positives, il vient que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

2. (a) D'après les règles de sommation des termes d'une suite géométrique, puisque u ne prend pas la valeur -1 , on a :

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{1 - (-u)^3}{1+u} - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}.$$

Puisque $u \geq 0$ et $1+u \geq 1$, on obtient immédiatement l'encadrement :

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $u = x^2t^2$, il vient :

$$0 \leq (1 - x^2t^2 + x^4t^4) - \frac{1}{1+x^2t^2} \leq x^6t^6,$$

et, en multipliant par $e^{-t^2} > 0$, et en intégrant entre $-\infty$ et $+\infty$, les intégrales étant toutes convergentes d'après la question I-2 et la question III-1, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4) e^{-t^2} dt - g(x) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 x^6 e^{-t^2} dt = x^6 I_6 = x^6 \frac{6!}{2^6 3!} \sqrt{\pi} \cdot x^6 \\ &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2^6} \sqrt{\pi} \cdot x^6 = \frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi} \cdot x^6. \end{aligned}$$

- (c) Ainsi, au voisinage de 0, puisque $x^6 = o(x^5)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4) e^{-t^2} dt + o(x^5) \\ &= I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 + o(x^5) = \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x^4 \right) + o(x^5). \end{aligned}$$

Partie IV – Nature d'une série

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ est positive, et

$$\frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \underset{+\infty}{\sim} t^{2p-2} e^{-t^2}.$$

Ainsi, si $p \neq 0$, la convergence de I_{2p-2} amène celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$.

De plus, si $p = 0$, on obtient l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} dt = g(1)$, donc convergente aussi.

2. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$t^2 + (2p)! \geq (2p)!, \quad \text{donc:} \quad 0 \leq \frac{1}{t^2 + (2p)!} \leq \frac{1}{(2p)!}.$$

Ainsi, les intégrales étant toutes convergentes, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on trouve :

$$0 \leq u_p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2} dt = \frac{I_{2p}}{(2p)!} = \frac{1}{4^p p!} \sqrt{\pi}$$

Or, la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{4^p p!}$ converge, en tant que série exponentielle de paramètre $\frac{1}{4}$, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_p$ étant à termes positifs, on en déduit que $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_p$ converge.

3. Plus généralement, étant donné $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_p x^p| \leq \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{4}\right)^p \cdot \sqrt{\pi},$$

et comme la série $\sum \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{4}\right)^p$ est convergente en tant que série exponentielle de paramètre $\frac{x}{4}$, on en déduit, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la convergence absolue, donc la convergence de la série $\sum u_p x^p$.