Probabilité 4 – Variables aléatoires à densité (technique et entraînement)
Correction de quelques exercices

Correction de l'exercice 2 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \lambda 2^{-x}$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = \mu 2^x$ si $x < 0$, où λ et μ sont deux réels.

1. • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc presque partout
   • La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, à condition que λ et μ soient positifs.
   • Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mu 2^x \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mu \mathrm{e}^{x \ln 2} \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda 2^{-x} \, \mathrm{d}x$ sont convergentes, en tant qu'intégrales exponentielles, et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x &= \mu \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x \ln 2} \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x \ln 2} \, \mathrm{d}x \\ &= \mu \Big[\frac{1}{\ln 2}\mathrm{e}^{x \ln 2}\Big]_{-\infty}^{0} + \lambda \Big[-\frac{1}{\ln 2}\mathrm{e}^{-x \ln 2}\Big]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{\mu}{\ln 2} + \frac{\lambda}{\ln 2} = \frac{\lambda + \mu}{\ln 2}.\end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } \lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0 \text{ et } \lambda + \mu = \ln 2.}$

2. On effectue sur l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t \ln 2} \, \mathrm{d}t$ le changement de variable linéaire (donc valide) $u = t \ln 2$. Cette intégrale est donc de même nature (et le cas échéant de même valeur) que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{u}{\ln 2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2}$ Cette intégrale est convergente en tant qu'intégrale $\Gamma(2)$, et

$$\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t \ln 2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(\ln 2)^2}\Gamma(2) = \frac{1!}{(\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2}.$$

   De même, en effectuant le changement de variable $u = -t \ln 2$ (amenant la convergence de la même façon), on trouve :

$$\int_{-\infty}^{0} t\mathrm{e}^{t \ln 2} \, \mathrm{d}t = -\int_{0}^{+\infty} \frac{u}{\ln 2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2} = -\frac{1}{(\ln 2)^2}.$$

   Par conséquent, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) \, \mathrm{d}t$ converge, donc X admet une espérance, et

$$E(X) = \mu \int_{-\infty}^{0} t\mathrm{e}^{t \ln 2} \, \mathrm{d}t + \lambda \int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t \ln 2} \, \mathrm{d}t = -\frac{\mu}{(\ln 2)^2} + \frac{\lambda}{(\ln 2)^2}.$$

   Ainsi, X est une variable centrée si et seulement si $\lambda - \mu = 0$, donc si $\lambda = \mu$. Comme on a de plus $\lambda + \mu = \ln 2$, $\boxed{X \text{ est une variable centrée si et seulement si } \lambda = \mu = \frac{\ln 2}{2}}$

3. De même que pour $E(X)$, avec les mêmes changements de variable, assurant l'existence de $V(X)$ en se ramenant à une intégrale $\Gamma(3)$:

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \frac{\ln 2}{2} \int_{-\infty}^{0} t^2\mathrm{e}^{t \ln 2} \, \mathrm{d}t + \frac{\ln 2}{2} \int_{0}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t \ln 2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln 2}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{u^2}{(\ln 2)^2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{u^2}{(\ln 2)^2}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\ln 2} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{(\ln 2)^2} = \frac{2!}{(\ln 2)^2} = \frac{2}{(\ln 2)^2}\end{aligned}$$

   Comme $E(X) = 0$, $\boxed{V(X) = E(X^2) = \frac{2}{(\ln 2)^2}}.$

4. On détermine la fonction de répartition en intégrant la densité, ou bien en primitivant par morceaux, et en recollant les morceaux par le choix convenable des constantes d'intégration pour obtenir les limites en $+\infty$ et $-\infty$, et la continuité. On obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x \ln 2} = 2^{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x \ln 2} = 1 - 2^{-x-1} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}}$$

On remarque que les deux expressions sont valables pour $k = 0$.

5. Tout d'abord, $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit alors $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$P(Y = k) = P(k \leqslant X < k+1) = F(k+1) - F(k).$$

On distingue deux cas :
- Si $k < 0$, $P(Y = k) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$
- Si $k \geqslant 0$, $P(Y = k) = 1 - 2^{-k-1-1} - 1 + 2^{-k-1} = 2^{-k-2}$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{P(Y = k) = \begin{cases} 2^{k-1} & \text{si } k < 0 \\ \frac{1}{2^{k+2}} & \text{si } k \geqslant 0 \end{cases}}$

L'espérance de Y existe si les deux sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+2}}$ et $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{k}{2^{-k+1}}$ convergent absolument. La première somme est (absolument) convergente en tant que série géométrique dérivée, et la seconde devient, après réindexation, $-\displaystyle\sum_{k=1} +\infty \frac{k}{2^{k+1}}$. On retrouve encore une fois une série géométrique dérivée de paramètre $\frac{1}{2}$, donc absolument convergente. Ainsi, Y admet une espérance, et

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+2}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+2}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Ainsi, on obtient une somme géométrique, d'où, après calcul : $\boxed{E(Y = -\frac{1}{2})}$

Normal : X a une répartition symétrique, mais la partie entière déséquilibre un peu vers la gauche, le déséquilibre moyen étant donné par la moitié d'un intervalle $[n, n+1]$.

Correction de l'exercice 5 –

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ est convergente, car f est une fonction contoinue par morceaux, à support borné $[0, 2]$. On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 a\, \mathrm{d}x + \int_1^2 3a\, \mathrm{d}x = 4a.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1$ si et seulement si $a = \frac{1}{4}$. Pour cette valeur de a, f est positive sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, donc presque partout. Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } a = \frac{1}{4}}$.

2. La densité f de X étant à support borné, X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{4}\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{3x}{4}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} + \frac{9}{8} = \boxed{\frac{5}{4} = E(X)}.$$

Le moment d'ordre 2 de X est :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{4}\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{3x^2}{4}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{12} + \frac{7}{4} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}.$$

Ainsi, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{11}{6} - \frac{25}{16} = \frac{88 - 75}{48} = \boxed{\frac{13}{48} = V(X)}.$$

3. Puisque X et Y sont indépendantes, une densité de $X+Y$ est $f_X \star f_Y$, à condition que ce produit de convolution soit continu presque partout.

Or, soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)f(x-t)\ \mathrm{d}t.$$
La fonction $t \mapsto f(t)f(x-t)$ est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [0,2] \cap [x-2,x]$. On obtient la discussion suivante :
- Si $x < 0$, ou si $x - 2 > 2$ (donc $x > 4$), $[0,2] \cap [x-2,x] = \varnothing$, donc $f \star f(x) = 0$;
- Si $x \in [0,1]$, $[x-2,x] \cap [0,2] = [0,x]$, et si $t \in [0,x]$, $x - t \in [0,x] \subset [0,1]$, donc
$$f(t)f(x-t) = a^2.$$
Ainsi,
$$f \star f(x) = \int_0^x a^2\ \mathrm{d}t = a^2 x = \frac{x}{16}.$$
- si $x \in [1,2]$, alors $[x-2,x] \cap [0,2] = [0,x]$, et :
$$\forall t \in [0,x],\quad f(t)f(x-t) = \begin{cases} 3a^2 & \text{si } t \in [0, x-1] \\ a^2 & \text{si } t \in [x-1, 1] \\ 3a^2 & \text{si } t \in [1, x]. \end{cases}$$
Ainsi,
$$f \star f(x) = \int_0^{x-1} 3a^2\ \mathrm{d}t + \int_{x-1}^1 a^2\ \mathrm{d}t + \int_1^x 3a^2\ \mathrm{d}t = 3a^2(x-1+x-1) + a^2(2-x) = a^2(5x-4) = \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}.$$
- Si $x \in [2,3]$, alors $[x-2,x] \cap [0,2] = [x-2,2]$, et
$$\forall t \in [x-2,2],\quad f(t)f(x-t) = \begin{cases} 3a^2 & \text{si } t \in [x-2, 1] \\ 9a^2 & \text{si } t \in [1, x-1] \\ 3a^2 & \text{si } t \in [x-1, 2]. \end{cases}$$
Ainsi,
$$f \star f(x) = \int_{x-2}^1 3a^2\ \mathrm{d}t + \int_1^{x-1} 9a^2\ \mathrm{d}t + \int_{x-1}^2 3a^2\ \mathrm{d}t = 3a^2(3-x+3-x) + 9a^2(x-2) = 3a^2 x = \frac{3x}{16}.$$
- Si $x \in [3,4]$, alors $[x-2,x] \cap [0,2] = [x-2,2]$, et
$$\forall t \in [x-2,2],\quad f(t)f(x-t) = 9a^2,$$
donc
$$f \star f(x) = \int_{x-2}^2 9a^2\ \mathrm{d}t = 9(4-x)a^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{16}x.$$

Cette fonction étant continue presque partout (elle est même continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit (X et Y étant indépendantes), qu'une densité de $X+Y$ est :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{X+Y}(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{5}{16}x - \frac{1}{4} & \text{si } x \in [1,2[, \\ \frac{3x}{16} & \text{si } x \in [2,3[, \\ \frac{9}{4} - \frac{9}{16}x & \text{si } x \in [3,4[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

4. D'après le second théorème de transfert, la variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - 2)^2 f(x)\ \mathrm{d}x$ converge absolument. Or, f étant nulle sauf sur $[0,2]$, cette intégrale vaut $\displaystyle\int_0^2 (\mathrm{e}^x - 2)^2 f(x)\ \mathrm{d}x$. Comme

la fonction $\mapsto (\mathrm{e}^x-2)^2 f(x)$ est continue par morceaux sur $[0,2]$, on en déduit que l'intégrale est définie, donc convergente. Ainsi, Z admet une espérance, et

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \frac{1}{4}\int_0^1 (\mathrm{e}^x-2)^2\ \mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_1^2 (\mathrm{e}^x-2)^2\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^x+4)\ \mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_1^2 (\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^x+4)\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)-4(\mathrm{e}-1)+4\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2)-4(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})+4\right)\\
&= \boxed{\frac{39}{8}+2\mathrm{e}-\frac{13}{4}\mathrm{e}^2+\frac{3}{8}\mathrm{e}^4 = E(Z)}.
\end{aligned}$$

5. X est à valeurs dans $[0,2]$, donc e^X-2 est à valeurs dans $[-1,\mathrm{e}^2-2]$, donc $(\mathrm{e}^X-2)^2$ est à valeurs dans $[0,(\mathrm{e}^2-2)^2]$, puisque $\mathrm{e}^2-2>1$.
Soit $x\in[0,(\mathrm{e}^2-2)^2]$. On a :

$$P(Z\leqslant x)=P((e^X-2)^2\leqslant x)=P(-\sqrt{x}\leqslant \mathrm{e}^X-2\leqslant\sqrt{x})=P(2-\sqrt{x}\leqslant \mathrm{e}^X\leqslant 2+\sqrt{x})$$

- Si $2-\sqrt{x}\leqslant 0$, donc si $x\geqslant 4$, alors l'événement $[2-\sqrt{x}\leqslant \mathrm{e}^X]$ est l'événement certain, donc

$$P(Z\leqslant x)=P(\mathrm{e}^X\leqslant 2+\sqrt{x})=P(X\leqslant\ln(2+\sqrt{x}))=F_X(\ln(2+\sqrt{x})).$$

- Si $0\leqslant x<4$, alors

$$P(Z\leqslant x)=P(\ln(2-\sqrt{x})\leqslant X\leqslant\ln(2+\sqrt{x}))=P(\ln(2-\sqrt{x})<X\leqslant\ln(2+\sqrt{x})),$$

car X est une variable à densité (donc les probabilités ponctuelles sont nulles). Ainsi

$$P(Z\leqslant x)=F_X(\ln(2+\sqrt{x}))-F_X(\ln(2-\sqrt{x})).$$

On a donc :

$$\boxed{F_Z(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ F_X(\ln(2+\sqrt{x}))-F_X(\ln(2-\sqrt{x})) & \text{si } x\in[0,4[\\ F_X(\ln(2+\sqrt{x})) & \text{si } x\in[4,(\mathrm{e}^2-2)^3]\\ 1 & \text{si } x>(\mathrm{e}^2-2)^3.\end{cases}}$$

Or, Z étant l'image par une fonction continue d'une variable aléatoire, Z est une variable aléatoire. Donc F_Z est bien une fonction de répartition. De plus :

- F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$, donc F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout x tel que $x\neq 0$, $x\neq 4$, $x\neq(\mathrm{e}^2-2)^2$, $\ln(2+\sqrt{x})\neq 0,1,2$, $\ln(2-\sqrt{x})\neq 0,1,2$. Puisque les fonctions $x\mapsto\ln(2+\sqrt{x})$ et $x\mapsto\ln(2-\sqrt{x})$ sont strictement monotones (donc injectives), il y a au plus 9 valeurs de x en lesquelles F_Z n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Donc F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout.
- La fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$, et les fonctions $x\mapsto\ln(2+\sqrt{x})$ et $x\mapsto\ln(2-\sqrt{x})$ sont continues respectivement sur $[0,(\mathrm{e}^2-2)^2]$ et sur $[0,4[$. Ainsi, d'après les règles de composition, F_Z coïncide sur les ouverts $]-\infty,0[$, $]0,4[$, $]4,(\mathrm{e}^2-2)^2[$ et $](\mathrm{e}^2-2)^2,+\infty[$ avec des fonctions continue, et elle est donc continue sur ces intervalles. De plus, puisque F_X est continue :
  * $\lim\limits_{x\to 0^-}F_Z(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}=F_X(\ln 2)-F_X(\ln 2)=0$. Ainsi, on a :

  $$\lim_{x\to 0^-}F_Z(x)=F_Z(0)=\lim_{x\to 0^+}F_Z(x),$$

  donc F_Z est continue en 0.
  * $\lim\limits_{x\to 4^-}F_Z(x)=F_X(4)-\lim\limits_{y\to-\infty}F_X(y)=F_X(4)=\lim\limits_{x\to 4^+}F_Z(x)$
  (la dernière égalité ne demandant en fait pas de vérification, puisque F_Z est continue à droite, en tant que fonction de répartition)
  Ainsi F_Z est continue en 4
  * $\lim\limits_{x\to((\mathrm{e}^2-2)^2)^-}F_Z(x)=F_X(\ln(2+\mathrm{e}^2-2))=F_X(2)=1=F_Z((\mathrm{e}^2-2)^2)$,
  et de même, par continuité à droite de F_Z, cela implique la continuité de F_Z en $(\mathrm{e}^2-2)^2$.

Ainsi, F_Z est continue.

On en déduit que Z est une variable aléatoire à densité, et, en dérivant F_Z presque partout, il vient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > (\mathrm{e}^2-2)^2, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} f_X(\ln(2+\sqrt{x})) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} f_X(2-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0,4[\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} f_X(\ln(2+\sqrt{x})) & \text{si } x \in [4, (\mathrm{e}^2-2)^2]. \end{cases}}$$

Or :

- $\ln(2+\sqrt{x}) \in [0,1[$ si et seulement si $1 \leqslant 2+\sqrt{x} < \mathrm{e}$, donc si et seulement si $0 \leqslant x < (\mathrm{e}-2)^2 < 4$,
- $\ln(2+\sqrt{x}) \in [1,2[$ si et seulement si $\mathrm{e} \leqslant 2+\sqrt{x} < \mathrm{e}$, donc $(\mathrm{e}-2)^2 \leqslant x < (\mathrm{e}^2-2)^2$
- $\ln(2-\sqrt{x}) \in [0,1[$ si et seulement si $1 < 2-\sqrt{x} < \mathrm{e}$, donc si et seulement si $0 \leqslant x < 1$ (la deuxième condition étant automatiquement satisfaite pour tout $x \geqslant 0$)
- $\ln(2-\sqrt{x}) \in [1,2[$ si et seulement si $\mathrm{e} < 2-\sqrt{x} < \mathrm{e}^2$, ce qui est impossible.

On obtient donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > 4, \\ \dfrac{1}{8\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} + \dfrac{1}{8\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} & \text{si } x \in [0, (\mathrm{e}-2)^2[\\ \dfrac{3}{8\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} + \dfrac{1}{8\sqrt{x}(2-\sqrt{x})} & \text{si } x \in [(\mathrm{e}-2)^2, 1[\\ \dfrac{3}{8\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} & \text{si } x \in [1, (\mathrm{e}^2-2)^2]. \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 6 – (Questions indépendantes)

1. Soit F_Y la fonction de répartition de Y et F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$. Pour commencer, le premier théorème de transfert assure que $-Y$ est une variable aléatoire, puisque $x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante, de dérivée ne s'annulant pas. Ainsi, on peut directement déterminer une densité de $-Y$ en dérivant sa fonction de répartition presque partout, sans autre justification à donner :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x),$$

car Y est une variable à densité. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x) = \begin{cases} 1-0 & \text{si } -x < 0 \\ 1-(-x) & \text{si } 0 \leqslant -x \leqslant 1 \\ 1-1 & \text{si } -x > 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Donc une densité de $-Y$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $-Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,0])$. Lorsque nous aurons étudié les propriétés des lois uniformes, nous serons en mesure d'affirmer cela directement.

À condition que le produit de convolution soit continu presque partout, une densité de $X-Y$ est alors donné par le produit de convolution $f_X \star f_{-Y}$, **puisque X et Y (donc X et $-Y$) sont indépendants**.

Calculons ce produit de convolution : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour une valeur de x fixée, $f_{-Y}(x-t)$ est non nulle (égale à 1) si et seulement si $x-t \in [-1,0]$, donc $t-x \in [0,1]$, donc $t \in [x, x+1]$. Ainsi :

$$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_x^{x+1} f_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\pi}(\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}\, x).$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, et X et $-Y$ étant indépendante (je préfère le rappeler, même si je l'ai mentionné plus haut déjà), une densité de f_{X-Y} est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{X-Y}(x) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x))}.$$

2. Remarquons d'abord que $\ln X$ et $\ln Y$ sont définies pour presque tout ω de Ω (la valeur $X=0$ et $Y=0$ étant quasi-impossible). Donc $\ln X$ et $\ln Y$ sont des variables aléatoires. De plus, ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée ne s'annulant pas, d'après le premier théorème de transfert, $\ln X$ et $\ln Y$ sont des variables aléatoires à densité. Enfin, on remarque que $\ln X$ et $\ln Y$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_-$, donc une densité de $\ln X$ et de $\ln Y$ sera nulle sur $\mathbb{R}_+$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad F_{\ln X}(x) = P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x,$$

puisque $\mathrm{e}^x \in [0,1]$. Ainsi, on obtient $f_{\ln X}$ (égal à $f_{\ln Y}$), en déruvant presque partout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X}(x) = f_{\ln Y}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons f cette fonction.
Puisque X et Y sont indépendantes, il en est de même de $\ln X$ et $\ln Y$. Ainsi, une densité de $\ln X + \ln Y$ sera donnée par $f \star f$, à condition que ce produit soit continu presque partout.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t f(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, $x - t \leqslant 0$ si et seulement si $t \geqslant x$. Ainsi :
- si $x \leqslant 0$, alors
$$f \star f(x) = \int_x^0 \mathrm{e}^t f(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_x^0 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{x-t}\ \mathrm{d}t = \int_x^0 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^x;$$
- si $x > 0$, alors $f \star f(x) = 0$.

Ainsi, cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$), et les variables $\ln X$ et $\ln Y$ étant indépendantes), il s'agit d'une densité de $\ln X + \ln Y = \ln(XY)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln(XY)}(x) = \begin{cases} -x\mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'exponentielle : celle-ci étant strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée ne s'annulant pas, d'après le premier théorème de transfert, XY est bien une variable aléatoire à densité. Elle prend ses valeurs dans $[0,1]$, et, pour tout $x \in]0,1]$:

$$F_{XY}(x) = P(XY \leqslant x) = P(\ln(XY) \leqslant \ln x) = F_{\ln(XY)}(\ln x),$$

et donc

$$f_{XY}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln(XY)}(\ln x) = -\frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot x = -\ln x.$$

On obtient donc au final une densité de XY par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{XY}(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_X(x) = f_Y(x) = f_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Notons f cette fonction. Commençons par déterminer $f \star f$. À condition que cette fonction soit continue presque partout, il s'agira d'une densité de $X+Y$, puisque X et Y sont indépendantes.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

Or,

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t)f(x-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \cap [x-1,x] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc la discussion suivante :
- Si $x < 0$, ou $x > 2$ alors $[0,1] \cap [x-1,x] = \varnothing$, et donc $f \star f(x) = 0$;
- Si $0 \leqslant x < 1$, alors $[0,1] \cap [x-1,x] = [0,x]$, et donc

$$f \star f(x) = \int_0^x 1\ \mathrm{d}t = x;$$

- Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $[0,1] \cap [x-1,x] = [x-1,1]$, et donc

$$f \star f(x) = \int_{x-1}^1 1\ \mathrm{d}t = 2-x.$$

La fonction obtenue est continue, sauf éventuellement en 0, 1 ou 2 (elle est en fait aussi continue en ces valeurs, mais c'est inutile de le savoir), donc, puisque X et Y sotn indépendantes, il s'agit d'une densité de $X+Y$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f_{X+Y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou si } t > 2 \\ x & \text{si } t \in [0,1[\\ 2-x & \text{si } t \in [1,2]. \end{cases}$$

Puisque $X+Y$ et Z sont indépendantes, une densité de $X+Y+Z$ est $f_{X+Y} \star f_Z$, à condition que cette fonction soit continue presque partout. Déterminons donc $f_{X+Y} \star f_Z$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(t) f_Z(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f_{X+Y}(t) f_Z(x-t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1[\cap[x-1,x] \\ 2-t & \text{si } t \in [1,2] \cap [x-1,x] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela amène la discussion suivante :
- si $x < 0$ ou si $x > 3$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_{X+Y}(t) f_Z(x-t) = 0$, donc $f_{X+Y} \star f_Z(x) = 0$.
- Si $x \in [0,1[$, alors $[0,1[\cap[x-1,x] = [0,x]$ et $[1,2] \cap [x-1,x] = \varnothing$, donc

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_0^x t\ \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

- Si $x \in [1,2[$, alors $[0,1[\cap[x-1,x] = [x-1,1[$ et $[1,2] \cap [x-1,x] = [1,x]$, donc :

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_{x-1}^1 t\ \mathrm{d}t + \int_1^x (2-t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(2-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = -x^2 + 3x - \frac{3}{2}.$$

- Si $x \in [2,3]$, alors $[0,1[\cap[x-1,x] = \varnothing$ et $[1,2] \cap [x-1,x] = [x-1,2]$, donc :

$$f_{X+Y} \star f_Z(x) = \int_{x-1}^2 (2-t)\ \mathrm{d}t = \frac{(3-x)^2}{2}$$

La fonction obtenue est de manière évidente continue, sauf éventuellement en $0, 1, 2$ ou 3. On peut vérifier qu'en fait elle est continue aussi en ces points. Comme $X+Y$ et Z sont indépendantes, il en résulte qu'une densité de $X+Y+Z$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1[\\ -x^2+3x-\dfrac{3}{2} & \text{si } x \in [1,2[\\ \dfrac{(3-x)^2}{2} & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 7 – Soit X, Y et Z des variables à densité mutuellement indépendantes, suivant des lois uniformes sur $]0,1]$.

1. X et Y sont indépendantes. Calculons le produit de convolution de f_X et f_Y, qui sont constantes sur $]0,1]$, de valeur 1, et nulles ailleurs. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X \star f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 f_Y(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f_Y(u)\, \mathrm{d}u,$$

par un changement de variables affine $u = x - t$. Ainsi :

- Si $x \leqslant 0$, $f_X \star f_Y(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} 0\, \mathrm{d}t = 0$
- Si $0 < x \leqslant 1$, $f_X \star f_Y(x) = \displaystyle\int_0^x 1\, \mathrm{d}t = x$
- Si $1 < x \leqslant 2$, $f_X \star f_Y(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{1} 1\, \mathrm{d}t = 2 - x$
- Si $x > 2$, $f_X \star f_Y(x) = 0$.

Cette fonction est continue presque partout, et X et Y sont indépendantes, donc $f_X \star f_Y$ est une densité de $X+Y$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Formons de même le produit de convolution de f_{X+Y} et f_Z :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z \star f_{X+Y}(x) = \int_0^1 f_Z(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f_Z(u)\, \mathrm{d}u.$$

Ainsi :

- Si $x \leqslant 0$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = 0$.
- Si $0 < x \leqslant 1$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_0^x u\, \mathrm{d}u = \frac{x^2}{2}$.
- Si $1 < x \leqslant 2$,

$$f_Z \star f_{X+Y}(x) = \int_{x-1}^{1} u\, \mathrm{d}u + \int_1^x 2-u\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(2-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} - x^2 + 3x.$$

- Si $2 < x \leqslant 3$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{2} 2-u\, \mathrm{d}u = \frac{(3-x)^2}{2}$
- Si $x > 3$, $f_Z \star f_{X+Y}(x) = 0$.

Cette fonction est continue presque partout, et $X+Y$ et Z sont indépendantes. Ainsi, il s'agit d'une densité de $X+Y+Z$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 32 - x^2 + 3x & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{(3-x)^2}{2} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

2. La variable X prend ses valeurs sur $[0,1]$. Or, ln n'est pas définie en 0. Mais $P(X=0)=0$, donc $\ln(X)$ est définie sur une partie presque certaine de Ω, il s'agit donc d'une variable aléatoire.

   Trouvons sa fonction de répartition. Puisque X prend ses valeurs dans $[0,1]$, $\ln(X)$ prend ses valeurs dans $]-\infty,0]$. Ainsi, si $x \geqslant 0$,
$$F_{\ln X}(x) = P(\ln X \leqslant x) = 1.$$
   Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a alors :
$$F_{\ln X}(x) = P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x,$$
   puisque l'exponentielle est positive, et puisque $\mathrm{e}^x \in [0,1]$.

   On vérifie facilement que $F_{\ln X}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, $\ln X$ est une variable aléatoire à densité, et une densité en est :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. On calcule le produit de convolution de $f_{\ln X}$ et $f_{\ln Y}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
$$f_{\ln X} \star f_{\ln Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(t) f_{\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t f_{\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{x-u} f_{\ln Y}(u)\ \mathrm{d}u.$$
   Ainsi :
   - Si $x \leqslant 0$,
$$f_{\ln X} \star f_{\ln Y}(x) = \int_{x}^{0} \mathrm{e}^{x-u}\mathrm{e}^u\ \mathrm{d}u = -x\mathrm{e}^x,$$
   - Si $x > 0$,
$$f_{\ln X} \star f_{\ln Y}(x) = 0.$$

   Cette fonction est continue presque partout, et $\ln X$ et $\ln Y$ sont indépendantes. Ainsi, il s'agit d'une densité de $\ln X + \ln Y$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X + \ln Y}(x) = \begin{cases} -x\mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
   On calcule le produit de convolution de $f_{\ln X+\ln Y}$ et de $f_{\ln Z}$.
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln Z} \star f_{\ln X+\ln Y}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln Z}(t) f_{\ln X+\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t f_{\ln X+\ln Y}(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{x-u} f_{\ln X+\ln Y}(u)\ \mathrm{d}u. \end{aligned}$$
   Ainsi :
   - Si $x \leqslant 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln Z} \star f_{\ln X+\ln Y}(x) = -\int_{x}^{0} \mathrm{e}^{x-u} u\mathrm{e}^u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x,$$
   - Si $x > 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln Z} \star f_{\ln X+\ln Y}(x) = 0.$$

   La fonction obtenue est continue presque partout, et $\ln Z$ et $\ln X + \ln Y$ sont indépendantes. Ainsi, il s'agit d'une densité de $\ln X + \ln Y + \ln Z$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln X+\ln Y+\ln Z} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Tout d'abord, X, Y et Z prennent leurs valeurs dans $[0,1]$, donc leur produit aussi. Ainsi, pour tout $x \leqslant 0$, $F_{XYZ}(x) = 0$, et pour tout $x \leqslant 1$, $F_{XYZ}(x) = 1$.

   Soit $x \in]0,1[$. On a $XYZ = \mathrm{e}^{\ln(XYZ)} = \mathrm{e}^{\ln X + \ln Y + \ln Z}$. Ainsi, on obtient la fonction de répartition de XYZ :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(XYZ \leqslant x) = P(\mathrm{e}^{\ln(XYZ)} \leqslant x) = P(\ln X + \ln Y + \ln Y \leqslant \ln x) = F_{\ln X+\ln Y+\ln Y}(\ln x)$$
   Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, et également en 0 et en 1 d'après la continuité de $F_{\ln X+\ln Y+\ln Y}$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Ainsi, XYZ est une variable aléatoire à densité et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{XYZ}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} f_{\ln X+\ln Y+\ln Z}(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 8 – Soit a un réel, et soit Soit f la fonction définie sur $]-1,3]$ par $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x+1}}$, et nulle sinon.

1. • La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.
   • L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{3} \frac{a}{\sqrt{t+1}}\ \mathrm{d}t$ est impropre en -1 seulement (car la fonction intégrée est continue sur $]-1,3]$, et en -1, il s'agit d'une intégrale de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$, donc convergente. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \Big[2a\sqrt{x+1}\Big]_{-1}^{3} = 4a.$$
   Une condition nécessaire pour que f soit une densité, est donc que $a = \frac{1}{4}$.
   • Si $a = \frac{1}{4}$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi, $\boxed{a = \frac{1}{4}}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une densité de probabilité.
2. Comme la densité de X est à support borné, X admet une espérance et une variance.
   • D'après le second théorème de transfert, $x \mapsto x+1$ étant continue (et $E(X+1)$ existant puisque $E(X)$ existe),
   $$E(X+1) = \int_{-1}^{3} \frac{(x+1)}{4\sqrt{x+1}} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\Big[(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-1}^{3}.$$
   Ainsi, $\boxed{E(X+1) = \frac{4}{3}.}$
   • On en déduit que $\boxed{E(X) = \frac{1}{3}}$.
   • De même, on déterminer $E((X+1)^2)$ avec le second théorème de transfert :
   $$E((X+1)^2) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} (x+1)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\Big[(x-1)^{\frac{5}{2}}\Big]_{-1}^{3} = \frac{16}{5}.$$
   • On a alors, d'après la formule de König-Huygens :
   $$V(X) = V(X+1) = E((X+1)^2) - E(X+1)^2 = \frac{16}{5} - \frac{16}{9},$$
   d'où $\boxed{V(X) = \frac{64}{45}.}$
3. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le premier théorème de transfert, qui affirme dans une premier temps que e^X est bien une variable à densité. De plus, φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et φ^{-1} est donc la fonction ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Le premier théorème de transfert permet donc de donner une densité f_{e^X} et e^X :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} f(\ln x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
   Or, pour tout $x > 0$,
   $$f(\ln x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\ln x + 1}} & \text{si } \ln x \in]-1,3], \text{ donc si } x \in]\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   On obtient donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad \boxed{f_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x\sqrt{1+\ln x}} & \text{si } x \in]\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$
4. Ici, le théorème de transfert n'est pas applicable. On revient à la définition de la fonction de répartition. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :
   $$F_{X^2}(y) = P(X^2 \leqslant y).$$
   Ainsi,
   • Si $y < 0$, $[X^2 \leqslant y]$ est l'événement impossible, donc
   $$P(X^2 \leqslant y) = 0.$$

- Si $y \geqslant 0$,
$$F_{X^2}(y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$
Comme F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ (car f est continue sur ce domaine), F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout y de $\mathbb{R}$ ne vérifiant pas $\pm\sqrt{y} = -1$ et $\pm\sqrt{y} = 3$, ainsi que $y = 0$ (point de jonction des deux domaines). Ainsi, F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 9\}$. Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient, par composition, la continuité de F_{X^2} sur $\mathbb{R}^*$. De plus,
$$\lim_{x \to 0^+} F_{X^2}(x) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} F_{X^2}(x) = F_{X_2}(0),$$
(la première égalité provenant de la continuité de F_X). Ainsi, F_{X^2} est aussi continue en 0. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, pour X^2 est une variable à densité. Une densité de X^2 est alors :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_{X^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) & \text{si } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Or, $f(-\sqrt{y})$ est nulle si $-\sqrt{y} \leqslant -1$, donc si $y \geqslant 1$, et $f(\sqrt{y})$ est nul si $\sqrt{y} > 3$, donc si $y > 9$ On obtient donc la densité suivante :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{X^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{y}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{y}}}\right) & \text{si } y \in [0, 1[\\ \frac{1}{4\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{y}}} & \text{si } y \in [1, 9], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 10 –

1. À condition que a soit positif, f est est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$, car elle coïncide sur chacun des intervalles ouverts constituant ce domaine avec une fonction continue.
Il reste donc à déterminer a de sorte à avoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^{3} a|x|\, \mathrm{d}x = 1$, cette dernière intégrale étant convergente, puisque non impropre. On a alors :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = a\int_{-1}^{0} (-x)\, \mathrm{d}x + a\int_{0}^{3} x\, \mathrm{d}x = \frac{a}{2} + \frac{9a}{2} = 5a.$$
Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $\boxed{a = \frac{1}{5}.}$
2. Le polynôme n'admet pas de racine réelle si et seulement si son discriminant est strictement négatif, donc ssi $(2B)^2 - 4AC < 0$ donc ssi $\boxed{AC - B^2 > 0}$.
3. - Les variables AC et B^2 sont bornées, donc admettent une espérance, donc aussi $AC - B^2$
   - Comme A et C sont indépendantes, $E(AC) = E(A)E(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.
   - D'après le théorème de transfert, $x \mapsto x^2$ étant continue sur $\mathbb{R}$:
   $$E(B^2) = \frac{1}{5}\int_{-1}^{3} t^2|t|\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\int_{-1}^{0} t^3\, \mathrm{d}t + \frac{1}{5}\int_{0}^{3} t^3 = \frac{1}{20}(1 + 3^4) = \frac{82}{20} = \frac{41}{10}.$$
   - On obtient donc
   $$E(AC - B^2) = \frac{3}{4} - \frac{41}{10} = \boxed{-\frac{67}{20}}.$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
   - Si $x \geqslant 0$, $[-B^2 \leqslant x]$ est l'événement certain, donc $F_{-B^2}(x) = 1$.
   - Si $x \leqslant 0$,
   $$\begin{aligned} P(-B^2 \leqslant x) = P(B^2 \geqslant -x) &= P([B \geqslant \sqrt{-x}] \cup [B \leqslant -\sqrt{-x}]) \\ &= 1 - F_B(\sqrt{-x}) + F_B(-\sqrt{-x}). \end{aligned}$$

   On a donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{-B^2}(x) = \begin{cases} 1 - F_B(\sqrt{-x}) + F_B(-\sqrt{-x}) & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme F_B est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$, d'après les règles de composition, F_{-B^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 (point de jonction des deux domaines), et aux valeurs x telles que $\sqrt{-x} = 0, -1, 3$, ou $-\sqrt{-x} = 0, -1, 3$, donc$x = 0$, $x = -1$ et $x = -9$. Ainsi, F_{-B^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, et pour les mêmes raisons, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs

$$\lim_{x \to 0^+} F_{-B^2}(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} F_{-B^2}(x) = 1 - F_B(0) + F_B(0) = 1 = F_{-B^2}(1).$$

Ainsi, F_{-B^2} est aussi continue en 0. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, $-B^2$ est une variable à densité, et en dérivant, on obtient une densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{-B^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}}(f_B(\sqrt{-x}) + f_B(-\sqrt{-x})) & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{-B^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{10} & \text{si } x \in [-9, -1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

5. Tout d'abord, la fonction ln étant de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $]0, 1] = A(\Omega)$, de dérivée strictement positive, $\ln(A)$ est une variable à densité, d'après le premier théorème de transfert, et une densité en est donnée par :

$$f_{\ln A}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t f_A(\mathrm{e}^t) & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, $\mathrm{e}^t \in]0, 1]$ si et seulement si $t \in]-\infty, 0]$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln A}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même (il n'y a que les bornes qui changent) une densité de $\ln C$ est :

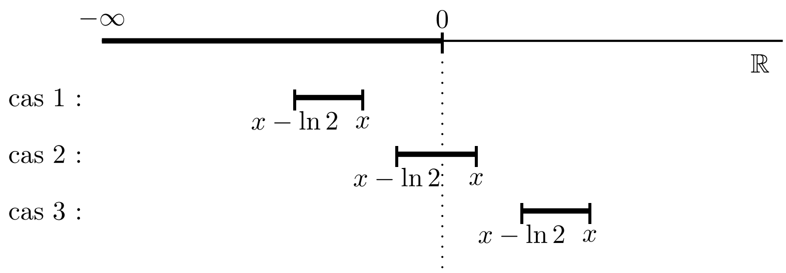
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln C}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } x \in [0, \ln 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $\ln A$ et $\ln C$ sont indépendantes, on détermine une densité de $\ln A + \ln C$ à l'aide du produit de convolution.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On déduit de la description précédente que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{\ln A}(t) f_{\ln C}(x - t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{x-t} = \mathrm{e}^x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cap [x - \ln 2, x] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les positionnements possibles de l'intervalle $[x - \ln 2, x]$ par rapport à l'intervalle $]-\infty, 0]$ sont donnés par le schéma suivant :



On obtient alors :

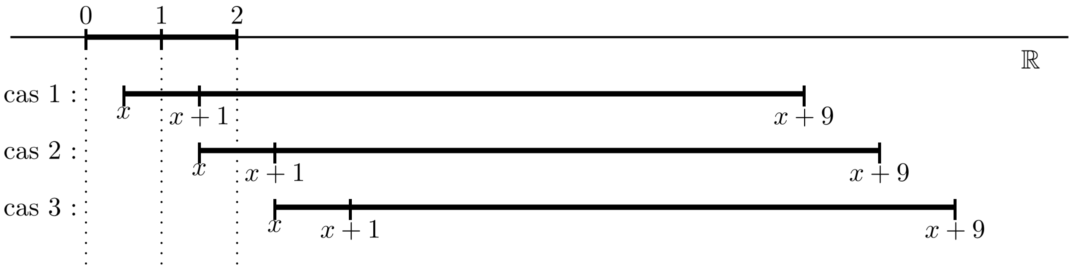
- Si $x \leqslant 0$, alors
$$f_{\ln A} \star f_{\ln C}(x) = \int_{x-\ln 2}^{x} \mathrm{e}^{x} \; \mathrm{d}t = \ln 2 \cdot \mathrm{e}^{x}.$$
- Si $x \in [0, \ln 2]$, alors
$$f_{\ln A} \star f_{\ln C}(x) = \int_{x-\ln 2}^{0} \mathrm{e}^{x} \; \mathrm{d}t = (\ln 2 - x)\mathrm{e}^{x}.$$
- Si $x > \ln 2$, alors
$$f_{\ln A} \star f_{\ln C}(x) = 0$$

La fonction obtenue étant continue presque partout, et par indépendance de A et C, on obtient une densité de la somme $\ln(A) + \ln(C)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \boxed{f_{\ln A + \ln C}(x) = \begin{cases} \ln 2 \cdot \mathrm{e}^{x} \text{si } x < 0 \\ (\ln 2 - x)\mathrm{e}^{x} & \text{si } x \in [0, \ln 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

6. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée strictement positive. Donc, d'après le premier théorème de transfert, $\mathrm{e}^{\ln A + \ln C} = AC$ est une variable à densité, et une densité est :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{AC}(t) = \frac{1}{x} f_{\ln A + \ln C}(\ln x)$$
Or, $\ln x \in]-\infty, 0]$ si et seulement si $x \in]0, 1]$, et $\ln x \in [0, \ln 2]$ si et seulement si $x \in [1, 2]$. Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{AC}(x) = \begin{cases} \ln 2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ \ln 2 - \ln x & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}}$$

7. Comme les variables AC et $-B^2$ sont indépendantes, on utilise le produit de convolution pour calculer une densité de la somme $AC - B^2$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{AC} \star f_{-B^2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{AC}(t) f_{-B^2}(x - t) \; \mathrm{d}t$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_{AC}(t)$ est donné ci-dessus, et
$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{-B^2}(x - t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [x, x+1] \\ \frac{1}{10} & \text{si } t \in [x+1, x+9] \end{cases}$$
Puisqu'on se retreint au cas où $x \geqslant 0$, il ne reste que 3 configurations possibles des intervalles $[x, x+1]$ et $[x+1, x+9]$ par rapport aux intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$, représenté par le schéma suivant :



- Cas 1 : $0 \leqslant x \leqslant 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
f_{AC} \star f_{-B^2}(x) &= \int_x^1 \frac{1}{5}\ln 2 \ \mathrm{d}t + \int_1^{x+1} \frac{1}{5}(\ln 2 - \ln t) \ \mathrm{d}t + \int_{x+1}^2 \frac{1}{10}(\ln 2 - \ln t) \ \mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x+1} \frac{\ln 2}{5} \ \mathrm{d}t - \frac{1}{10}\int_1^2 \ln t \ \mathrm{d}t - \frac{1}{10}\int_1^{x+1} \ln t \ \mathrm{d}t + \int_{x+1}^2 \frac{\ln 2}{10} \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln 2}{5} - \frac{1}{10}\Big[t\ln t - t\Big]_1^2 - \frac{1}{10}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{x+1} + (1-x)\frac{\ln 2}{10} \\
&= \frac{\ln 2}{5} - \frac{\ln 2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10}(x+1)\ln(x+1) + \frac{x}{10} + \frac{1-x}{10}\ln 2 \\
&= \frac{1}{10} + \frac{x}{10} + \frac{1-x}{10}\ln 2 - \frac{1}{10}(x+1)\ln(x+1) \\
&= \frac{1+\ln 2}{10} + \frac{x(1-\ln 2)}{10} - \frac{1}{10}(x+1)\ln(x+1).
\end{aligned}$$

- Cas 2 : $1 \leqslant x \leqslant 2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f_{AC} \star f_{-B^2}(x) &= \int_x^2 \frac{1}{5}(\ln 2 - \ln t) \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2-x}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\Big[t\ln t - t\Big]_x^2 \\
&= \frac{2-x}{5}\ln 2 - \frac{2\ln 2 - 2}{5} + \frac{x\ln x - x}{5} \\
&= \frac{2}{5} - \frac{x(1+\ln 2)}{5} + \frac{1}{5}x\ln x
\end{aligned}$$

- Cas 3 : $x \geqslant 2$. On obtient :

$$f_{AC} \star f_{-B^2}(x) = 0.$$

Puisque AC et $-B^2$ sont indépendantes, et puisqu'on admet que $AC - B^2$ est une variable aléatoire (ce qui nous dispense de la justification de continuité presque partout, qui nous obligerait à calculer h sur $\mathbb{R}_-$), on obtient bien :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \boxed{h(x) = f_{AC-B^2}(x) = f_{AC} \star f_{-B^2}(x) = \begin{cases} \frac{1+\ln 2}{10} + \frac{x(1-\ln 2)}{10} - \frac{(x+1)\ln(x+1)}{10} & \text{si } x \in [0,1], \\ \frac{2}{5} - \frac{(1+\ln 2)x}{5} + \frac{x\ln x}{5} & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}}$$

8. La probabilité p que $AX^2 + 2BX + C$ n'admette pas de racine est la probabilité que $AC - B^2$ soit strictement positif, donc :

$$\boxed{p = P(AC - B^2 > 0) = \int_0^{+\infty} h(x) \ \mathrm{d}x}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
p &= \int_0^1 \left(\frac{1+\ln 2}{10} + \frac{x(1-\ln 2)}{10} - \frac{(x+1)\ln(x+1)}{10}\right) \ \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{5} - \frac{(1+\ln 2)x}{5} + \frac{x\ln x}{5}\right) \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1+\ln 2}{10} + \frac{1-\ln 2}{20} - \frac{1}{20}\Big[(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{2}{5} - \frac{3(1+\ln 2)}{10} + \frac{1}{10}\Big[x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 \\
&= \frac{3+\ln 2}{20} - \frac{1}{40} - \frac{1}{5}\ln 2 + \frac{1}{10} + \frac{1-3\ln 2}{10} + \frac{2}{5}\ln 2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \\
&= \boxed{\frac{7}{40} - \frac{\ln 2}{20}.}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 – (EDHEC 2010)

1. (a) La fonction $\varphi : x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et de dérivée non nulle sur $\mathbb{R}$, et telle que $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc, d'après le premier théorème de transfert, $-Y$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{-Y}(x) = -(\varphi^{-1})'(x) f_Y(\varphi^{-1}(x)) = f_Y(-x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } -x \in [0, a[\text{ donc si } x \in]-a, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

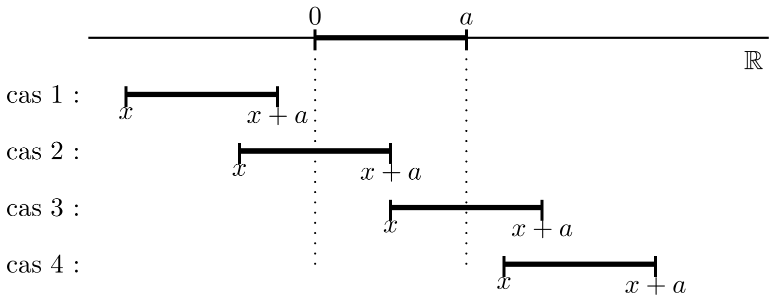
Ainsi, $\boxed{-Y \text{ suit une loi uniforme sur }]-a,0]}$, de densité $\frac{1}{a}$ sur cet intervalle, et nulle sinon.

(b) Les variables aléatoires X et $-Y$ étant indépendantes, on peut calculer une densité de $X-Y$ à l'aide du produit de convolution.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) f_{-Y}(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & \text{si } t \in [0,a[\subset [x, x+a[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On étudie les positions relatives possibles de l'intervalle $[x, x+a[$ par rapport à $[0,a[$ (on peut remarquer que ces deux intervalles ont la même longueur). Cela nous donne le diagramme suivant :



- Cas 1 et 4 : $x < -a$ ou $x > a$:
  On obtient $f_X \star f_{-Y}(x) = 0$.
- Cas 2 : $x \in [-a, 0]$:

$$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_0^{x+a} \frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x+a}{a^2} = \frac{a-|x|}{a^2}.$$

- Cas 3 : $x \in [0, a]$:

$$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_x^{a} \frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{a-x}{a^2} = \frac{a-|x|}{a^2}.$$

La fonction obtenue étant continue presque partout, et les variables étant indépendantes, il s'agit bien d'une densité de $X-Y$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_{X-Y}(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

On note G la fonction de répartition de $X-Y$.

2. (a) La fonction Z prend ses valeurs dans $[0,a]$, donc

$$F_Z(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } F_Z(t) = 1 \text{ si } t > a.$$

Soit $t \in [0,a]$, on a alors :

$$F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = P(|X-Y| \leqslant t) = P(-t \leqslant X - Y \leqslant t) = G(t) - G(-t).$$

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{H(t) = F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ G(t) - G(-t) & \text{si } t \in [0,a] \\ 1 & \text{si } t > a. \end{cases}}$$

(b) L'énoncé nous fait admettre que Z est une variable aléatoire à densité : il est inutile de vérifier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ presque partout de H. En dérivant presque partout, et en utilisany le fait que $G' = f_{X-Y}$ presque partout, on obtient une densité de Z :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f_{X-Y}(x) + f_{X-Y}(-x) = \frac{a-x}{a^2} + \frac{a-|-x|}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3. Z est une variable à densité bornée, donc elle admet une espérance et une variance.
   - On a :
   $$E(Z) = \int_0^a \frac{2x(a-x)}{a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\frac{a^3}{6} = \boxed{\frac{a}{3}}$$
   - Le moment d'ordre 2 est :
   $$E(Z^2) = \int_0^a \frac{2x^2(a-x)}{a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\frac{a^4}{12} = \boxed{\frac{a^2}{6}}$$
   - On en déduit la variance, d'après la formule de König-Huygens :
   $$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \boxed{\frac{a^2}{18}}.$$
4. Simulation informatique.
   Y'a pas de quoi fouetter un chat :
```
function Z(a:real):real;
begin
  Z:= abs(a*random-a*random);
end;
```

Correction de l'exercice 16 – (EDHEC 2000)

1. (a) On a
$$p(t,h) = P(X \leqslant t+h \mid X \geqslant t) = \frac{P(t \geqslant X \leqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X < t+h) - P(X < t)}{1 - P(X < t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)}.$$
   (b) Il manque visiblement une hypothèse pour pouvoir conclure. Si on ne suppose pas que f est au point t la dérivée de F, on ne peut pas conclure (dans ce cas, la valeur de f en t peut être quelconque, et on n'a aucun contrôle sur l'équivalent). (Erreur de ma part : dans l'énoncé de concours, il y avait une hypothèse de continuité de f, ce qui règle le problème)
   Supposons donc que t est tel que F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$, ce qui est le cas si f est continue. Alors, par définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement, on a, lorsque h est au voisinage de 0^+,
$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = F'(t) + o(1) \qquad \text{soit:} \qquad F(t+h) - F(t) = hF'(t) + o(h) = hf(t) + o(h).$$
   (remarquez que c'est l'expression de la formule de Taylor-Young, mais je n'ai utilisé ici que la dérivabilité, et non le caractère $\mathcal{C}^1$) Ainsi,
$$p(t,h) = \frac{hf(t)}{1 - F(t)} + o(h) \qquad \text{donc:} \qquad p(t,h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{hf(t)}{1 - F(t)}.$$
2. (a) Soit $t > 0$. Comme f est continue, $f = F'$. On a :
$$\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{F'(u)}{1 - F(u)}\,\mathrm{d}u = \Big[-\ln|1 - F(u)|\Big]_0^t = \ln(1 - F(0)) - \ln(1 - F(t)).$$
   Comme la densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a $F(0) = 0$, donc :
$$\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}t = -\ln(1 - F(t)).$$
   Ainsi, pour tout $t > 0$,
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_X(u)\right)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_-, \quad F(t) = 0.$$
   Ainsi, la donnée de λ_X permet de déterminer la fonction de répartition.
   Remarquez que la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ est suffisante.

(b) Soit X une variable suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Une densité est donnée par f nulle sur $\mathbb{R}_-$, et définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda}$. Cette densité est bien strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-$. Elle n'est pas continue en 0, mais est continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est suffisant pour la question précédente.

La fonction de répartition de X est F nulle sur $\mathbb{R}_-$, et donnée par $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, le taux de panne est défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda_X(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \lambda.$$

Ainsi, λ_X est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, son domaine de définition.

Réciproquement, soit X ayant un taux de panne constant λ. Par définition, X prend des valeurs positives, donc $F(t) = 0$ pour tout $t \leqslant 0$. De plus, d'après la question précédente, pour tout $t > 0$,

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda \, du\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Il s'agit de la fonction de répartition d'une variable suivant une loi exponentielle. Donc X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Ainsi, les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant, et elles sont les seules dans ce cas.

3. (a) L'appareil survit plus d'un an si et seulement si $[X \geqslant 1]$ est réalisé. Calculons la fonction de répartition F de X. Elle est nulle sur $\mathbb{R}_-$, et :

$$\forall t > 0, \quad F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t u^3 \, du\right) = 1 - e^{-\frac{t^4}{4}}.$$

Ainsi, la probabilité que l'appareil survive plus d'un an est :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - F(1) = e^{-\frac{1}{4}}.$$

(b) Il s'agit de calculer :

$$P(X \geqslant 3 \mid X \geqslant 1) = \frac{P(X \geqslant 3, X \geqslant 1)}{P(X \geqslant 1)} = \frac{P(X \geqslant 3)}{P(X \geqslant 1)} = \frac{e^{-\frac{81}{4}}}{e^{-\frac{1}{4}}} = e^{-20}.$$

C'est très peu !