Probabilité 5 – Lois continues classiques
Quelques corrections

Correction de l'exercice 2 – Un peu de lecture de table, en remarquant que $Y = \frac{X-7}{4}$ suit une loi normale centrée réduite.

1. • $P(X < 7) = P(\frac{X-7}{4} < 0) = P(Y < 0) = P(Y \leqslant 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$.
   • $P(X \leqslant 12.12) = P(Y \leqslant 1.28) = \Phi(1.28) = 0.8997$
   • $P(X < 8.26) = P(Y < 0.315) = \Phi(0.315) = \Phi(0.31) + \frac{1}{2}(\Phi(0.32) - \Phi(0.31)) = 0.6217 + \frac{1}{2} \cdot 0.0038 = 0.6236$.
   • $P(5.25 < X \leqslant 9.13) = P(-0.4375 < X < 0.5325) = \Phi(0.5325) - \Phi(-0.4375) = \Phi(0.5325) - 1 + \Phi(0.4375)$.
   Or :
   $\Phi(0.5325) = \Phi(0.53) + \frac{1}{4}(\Phi(0.54) - \Phi(0.53)) = 0.7019 + \frac{1}{4} \cdot 0.0035 \simeq 0.7028$ et :
   $\Phi(0.4375) = \Phi(0.43) + \frac{3}{4}(\Phi(0.44) - \Phi(0.43)) = 0.6664 + \frac{3}{4} \cdot 0.0036 = 0.6691$.
   Ainsi, $P(5.25 < X \leqslant 9.13) = 0.3719$.
2. • On a $P(X < x) = P(Y < \frac{x-7}{4}) = 0.9162$. Or, $\Phi(1.38) = 0.9162$, donc $\frac{x-7}{4} = 1.38$, donc $x = 12.52$.
   • $P(X > x) = P(Y > \frac{x-7}{4}) = 0.9418$, donc $P(Y \leqslant \frac{x-7}{4}) = 0.0582$, donc $\Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) = 0.0582$, donc $\Phi\left(\frac{7-x}{4}\right) = 1 - 0.0582 = 0.9418$. On a donc, par lecture de table, $\frac{7-x}{4} = 1.57$, donc $x = 0.72$.
   • Si $x \leqslant 7$, alors $-x + 14 \geqslant x$, donc $P(-x + 14 < X < x) = 0$.
   Si $x > 7$, $P(-x + 14 < X < x) = P(\frac{-x+7}{4} < Y < \frac{x-7}{4}) = \Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-x+7}{4}\right) = 2\Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) - 1$. Ainsi,
   $$\Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) = \frac{1 + 0.9418}{2} = 0.9709$$
   Or, $\Phi(1.89) = 0.9706$ et $\Phi(1.90) = 0.9713$, donc
   $$\frac{x-7}{4} = 1.89 + 0.01 \cdot \frac{0.9709 - 0.9706}{0.9713 - 0.9706} = 1.894 \qquad \text{puis:} \qquad x \simeq 14.58$$

Correction de l'exercice 4 –

1. Une densité de X est :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-t} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ strictement positive, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, dans lequel X prend ses valeurs presque sûrement. Ainsi, d'après le premier théorème de transfert, Y est une variable aléatoire à densité, et
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = P(\sqrt{X} \leqslant t) = \begin{cases} P(X \leqslant t^2) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Ainsi, en dérivant presque partout (Y étant une variable à densité), on obtient une densité de Y :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \boxed{f_Y(t) = \begin{cases} 2t f_X(t^2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$
2. Puisque $B(\Omega) = \{-1, 1\}$, les événements $[B = 1]$ et $[B = -1]$ forment un système complet. Par ailleurs, étant donné $t \in \mathbb{R}$:
   • $P_{[B=1]}(Z \leqslant t) = P(Y \leqslant t) = F_Y(t)$
   • $P_{[B=-1]}(Z \leqslant t) = P(-Y \leqslant t) = P(Y \geqslant -t) = 1 - F_Y(-t)$.

Ainsi, d'après la formule les probabilités totales,

$$F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = P(B=1)F_Y(t) + P(B=-1)(1-F_Y(-t)) = \frac{1}{2}(F_Y(t) + 1 - F_Y(-t)).$$

Comme F_Y est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, il en est de même de F_Z. Ainsi, Z est une variable à densité, et une densité est obtenue par dérivation presque partout de l'égalité précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = \frac{1}{2}(f_Y(t) + f_{-Y}(-t)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2} + 0 & \text{si } t > 0 \\ 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-(-t)^2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on obtient donc une densité de Z :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}}.$$

Ainsi, $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$. On en déduit : $\boxed{E(Z) = 0}$ et $\boxed{V(Z) = \frac{1}{2}}$.

3. On refait le même raisonnement, en considérant cette fois X dont une densité est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \frac{t^{\nu-1}}{b^\nu \Gamma(\nu)} \mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}.$$

On a alors, par le même raisonnement que ci-dessus :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 2t f_X(t^2) = \frac{2t^{2\nu-1}}{b^\nu \Gamma(\nu)} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, toujours d'après le même raisonnement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_Z(t) = \frac{1}{2}(f_Y(t) + f_Y(-t)) = \frac{|t|^{2\nu-1}}{b^\nu \Gamma(\nu)} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{b}}.}$$

Pour que Z suive une loi normale centrée réduite, il est donc nécessaire et suffisant que $2\nu - 1 = 0$ et $b = 2$, donc $\boxed{\nu = \frac{1}{2} \text{ et } b = 2}$. Remarquez qu'il s'agit de la loi du χ^2 à 1 degré de liberté. Ce n'est pas anodin, puisqu'on a fait ici l'opération inverse de celle qui permet de retouver la loi du χ^2 en élevant au carré une variable normale centrée réduite.

Correction de l'exercice 11 –

1. (a) L'événement $[X_1 > t]$ est réalisé si et seulement si le premier voyageur arrive après le temps t, donc si et seulement si aucun voyageur n'arrive entre le temps 0 et le temps t, donc si et seulement si $[N_t = 0]$ est réalisé. Ainsi

$$P(X_1 > t) = P(N_t = 0) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha t)^0 0! = \boxed{\mathrm{e}^{-\alpha t} = P(X_1 > t)}.$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - P(X_1 > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)}$.

(b) On obtient donc $\boxed{E(X_1) = \frac{1}{\alpha}}$ et $\boxed{V(X_1) = \frac{1}{\alpha^2}}$.

2. (a) Soit $t > 0$. Comme plus haut, $[X_n > t]$ est réalisé si et seulement si $[N_t < n]$ est réalisé. Ainsi

$$P(X_n > t) = P(N_t < n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N_t = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

Par conséquent, la fonction de répartition de X_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$ (car X_n prend des valeurs positives uniquement), et pour tout $t > 0$:

$$F_{X_n}(t) = 1 - P(X_n > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

(b) La fonction F_{X_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, et

$$\lim_{t\to 0^+} F_{X_n}(t) = \lim_{t\to 0^+} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha t)^k}{k!} = 1 - \mathrm{e}^0\frac{(\alpha 0)^0}{0!} = 0 = \lim_{t\to 0^-} F_{X_n}(t) = F_{X_n}(0).$$

Ainsi, F_{X_n} est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$ (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$). On en déduit que X_n est une variable à densité, et une densité de X_n est obtenue par dérivation presque partout : f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$, et, pour tout $t>0$,

$$f_n(t) = \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha t)^k}{k!} - \mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha(\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!},$$

et ces sommes étant téléscopiques,

$$f_n(t) = \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ainsi, $X_n \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, n\right)$

3. On en déduit, d'après le cours, que $\boxed{E(X_n) = \frac{n}{\alpha}}$ et $\boxed{V(X_n) = \frac{n}{\alpha^2}}$.

Correction de l'exercice 13 – (ESCP 2010)

1. (a) On a $S_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} D_{k,1}$. Or, les $D_{k,i}$ suivent des lois normales $\mathcal{N}(0,1)$, de façon mutuellement indépendante. Ainsi, par stabilité des lois normales, $S_{n,1}$ suit une loi normale $\boxed{\mathcal{N}(0,n).}$

(b) La variable $\frac{S_{n,1}}{\sqrt{n}}$ (variable centrée réduite associée à $S_{n,1}$) suit par conséquent une loi normale centrée réduite. Ainsi :

$$P(|S_{n,1}|\leqslant 1) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

En utilisant la symétrie de Φ,

$$\boxed{P(|S_{n,1}|\leqslant 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1.}$$

La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc d'après la formule de Taylor-Young en 0, on a, au voisinage de 0 :

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \Phi'(0)x + o(x).$$

Or,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{donc:} \qquad \Phi'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

De plus, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. On a donc, au voisinage de 0 :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + o(x),$$

d'où

$$2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

d'où finalement :

$$\boxed{P(|S_{n,1}|\leqslant 1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}}.$$

(c) Par indépendance des $D_{k,i}$, les trois variables $S_{n,1}$, $S_{n,2}$ et $S_{n,3}$ sont indépendantes. Ainsi

$$P(A_n) = P([|S_{n,1}|\leqslant 1]\cap[|S_{n,2}|\leqslant 1]\cap[|S_{n,3}|\leqslant 1]) = P(|S_{n,1}|\leqslant 1)P(|S_{n,2}|\leqslant 1)P(|S_{n,3}|\leqslant 1).$$

Les calculs effectués pour $S_{n,1}$ sont bien sûr aussi valables pour $S_{n,2}$ et pour $S_{n,3}$, et on trouve donc :

$$P(A_n) = P(|S_{n,1}|\leqslant 1)^3 \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. (a) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on effectue une récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ (on élargit un peu les valeurs possibles de m pour avoir une initialisation plus facile)

Soit, pour tout m dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(m)$: $P\left(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)$.

- Si $m = 0$, on a
$$P\left(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\right) = P(A_k) = \sum_{k=n}^{n+m} P(A_k).$$
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- Soit $m \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(m)$ soit vrai. On a alors
$$P\left(\bigcup_{k=n}^{n+m+1} A_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\right) \cup A_{n+m+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\right) + P(A_{n+m+1}) - P\left(A_{n+m+1} \cap \bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\right),$$
d'où, par positivité d'une probabilité, et par l'utilisation de l'hypothèse de récurrence :
$$P\left(\bigcup_{k=n}^{n+m+1} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} P(A_k) + P(A_{n+m+1}) = \sum_{k=n}^{n+m+1} P(A_k).$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout m dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(m)$ entraîne $\mathcal{P}(m+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout m dans $\mathbb{N}$.

(b) La série de terme général $P(A_k)$ est une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent, à une constante multiplicative près, au terme général d'une série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2}$. Elle est donc convergente, d'après les théorèmes de comparaison. Par conséquent, on peut passer à la limite lorsque m tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, la limite du terme de gauche provenant du théorème de limite monotone pour les probabilités :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

Par ailleurs, le terme de droite de cet encadrement est le reste d'une série convergente, donc il tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}\right) = 0.}$$

(c) D'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités, la suite d'événement $\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante au sens de l'inclusion, on obtient :
$$\boxed{P\left(\bigcap_{n \geqslant 1}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right) = 0}$$

3. L'événement A_n se réalise une infinité de fois si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k \geqslant n} A_k$ est réalisé (quelle que soit la valeur qu'on se donne, on trouvera toujours un événement A_n de rang supérieur qui est réalisé), donc si et seulement si l'événement $\bigcap_{n \geqslant 1}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right)$ est réalisé. Cet événement étant réalisé avec une probabilité nulle, on peut affirmer que $\boxed{A_n \text{ se réalisera un nombre fini de fois presque sûrement.}}$