DM n° 1 : Révisions de première année

Problème 1 – *On considère deux jetons J_1 et J_2 équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer). Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1. Un joueur choisit au hasard un jeton, puis effectue une série de lancers avec ce jeton. On note E l'événement :*

$$E \ : \ \text{« le jeton } J_1 \text{ est choisi pour le jeu »}$$

et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement :

$$U_k \ : \ \text{« le } k\text{-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».}$$

Partie I – Étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   (b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0, et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1, et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.
   (b) En déduire que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   (c) Montrer que X a une espérance, puis déterminer $E(X)$.
   (d) Montrer que $X(X - 1)$ a une espérance, la déterminer, puis vérifier que $V(X) = 2$.
3. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$.
   (b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.
   (c) Montrer que Y a une espérance, puis déterminer $E(Y)$.
   (d) Montrer que $Y(Y - 1)$ a une espérance, la déterminer, puis vérifier que $V(Y) = \frac{5}{4}$.
4. *On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire S par :*
   $$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)).$$
   (a) Déterminer $S(\Omega)$.
   (b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$.
   (c) Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, comparer d'une part $[X = n]$ et $[Y < n]$, et d'autre part $[Y = n]$ et $[X < n]$, puis en déduire que :
   $$[S = n] = [X = n] \cup [Y = n].$$
   (d) Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.
5. *On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire I par :*
   $$\forall \omega \in \Omega, \quad I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)).$$
   (a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.
   (b) Déterminer $P(I = 0)$, puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie II – Simulation des variables X et Y

On rappelle que `random(2)` *renvoie au hasard un entier de $\{0, 1\}$.*

1. On considère le programme suivant :

```
Program SimuleX;
Var jeton, lancer, X:integer;
Begin
  Randomize;
  X:=0;
  jeton:=random(2)+1;
  if jeton=1 then
    begin
      repeat
        X:=X+1;
        lancer:= random(2);
      until
        lancer=0;
    end;
  writeln(X);
end.
```

(a) Expliquer le fonctionnement de ce programme et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.

(b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « `repeat ... until` » est fini ?

2. Écrire un programme Pascal qui donne la valeur de la variable Y.

Problème 2 – Exponentielles et logarithmes de matrices

L'objet de ce problème est d'étudier certaines séries de matrices $\sum A_n$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrice. On s'intéresse notamment aux séries exponentielles, logarithmiques et géométriques

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit pour tout $n \in n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (matrice carrée de taille n). On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la suite numérique des coefficients en position (i,j) des matrices A_n converge vers le coefficient en position (i,j) de A (convergence coefficient par coefficient). La série $\sum A_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge, ce qui équivaut à dire que les séries convergent coefficient par coefficient.

On admettra dans tout le problème que : $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$

On définit, pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle les séries convergent :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}, \qquad \textit{et} \qquad \ln(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(A-I_p)^n}{n}.$$

On se propose d'étudier ces deux séries, ainsi que la série géomérique, sur deux exemples explicites.

Partie I – Premier exemple

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geqslant 2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Dans cette question, $p = 4$ et $a = 1$.
   (a) Calculer explicitement A^0, A^1, A^2, A^3, A^4 puis A^n pour tout $n > 4$.
   (b) En déduire l'existence et l'expression de $\exp(A)$.
   (c) Déterminer $\exp(-A)$.
   (d) Calculer le produit $\exp(A)\cdot\exp(-A)$. Cela vous étonne-t-il ?
   (e) On note $C = \exp(A) - I_4$. Calculer C^2, C^3, C^4 puis C^n pour tout $n > 4$.
   (f) En déduire l'existence et la valeur de $\ln(\exp(A))$. Ce résultat est-il-étonnant ?
2. On revient au cas général.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant p$, $A^n = 0$, et exprimer A^n pour $n \in [\![1, p-1]\!]$

(b) En déduire l'existence de $\exp(A)$, ainsi que son expression sous forme d'une somme finie de puissances de A. On essayera ensuite de représenter le résultat sous forme matricielle.

(c) Calculer de même $\exp(-A)$, puis jusitifiez que $\exp(-A)$ est l'inverse de $\exp(A)$.

3. On considère à nouveau $p = 4$ et $a = 1$.

(a) Montrer que $I_4 - A$ est inversible et calculer son inverse.

(b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ et comparer au résultat de la question précédente. Cela vous étonne-t-il ?

4. On revient au cas général.

(a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ converge et calculer sa somme.

(b) En déduire $(I_p - A)^{-1}$.

Partie II – Deuxième exemple

On pose $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$

(b) Déterminer P^{-1}.

(c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n.

(d) En déduire l'existence et l'expression de $\exp(D)$.

(e) Montrer que $\exp(A)$ existe et que $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$.

(f) En déduire que $\exp(A) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1} \\ \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-2} + 2\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$.

2. (a) Calculer de la même façon $\exp(-A)$.

(b) Calculer le produit $\exp(A) \cdot \exp(-A)$. Conclusion ?

3. On note $B = \exp(A)$. Notre but est de déterminer $\ln(B) = \ln(\exp(A))$.

(a) Justifier qu'il existe une matrice diagonale D' que l'on déterminera telle que $B - I_2 = PD'P^{-1}$.

(b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, D'^n.

(c) Justifier l'existence de $\ln(D' + I_2)$ et donner son expression.

(d) En déduire l'existence et la valeur de $\ln(B)$. Le résultat vous étonne-t-il ?

Problème 3 –

On note $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
Le but de ce problème est la construction d'une application $f : I \to \mathbb{R}$, *continue et telle que :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right)\,\mathrm{d}t.$$

On considère les applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$, *définies par* $f_0 = 1$ *(application constante égale à 1) et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right)\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application polynomiale.

(b) Vérifier que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6}$, et calculer $f_3(x)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I. On note :

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

(a) (question ajoutée) Justifier sans calcul que cette borne supérieure est en fait un maximum.

(b) Calculer D_1 et D_2.

(c) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I, \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}D_n.$$

On pourra étudier séparément les cas $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$.

(d) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

(e) Établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} D_n$.

En déduire que, pour tout x fixé, la série $\sum_{n\geqslant 1}(f_n(x) - f_{n-1}(x))$ converge.

3. Établir que, pour tout x fixé dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On définit ainsi une application $f : I \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.
   (a) Montrer :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n \leqslant 1 + \frac{1}{2}M_{n-1}.$$

   (b) Montrer :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n \leqslant 2$$

   (c) Établir :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2|x - y|.$$

5. (a) Établir :

   $$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|.$$

   (b) En déduire que f est continue sur I.
6. (a) Établir

   $$\forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

   (b) En déduire :

   $$\forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

7. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(t^2))\ \mathrm{d}t.$$

8. (question ajoutée)
   (a) Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée f' en fonction de f.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
9. (question ajoutée)
On suppose défini, dans l'entête d'un programme en Pascal, le type `type polynome = array[0..Nmax] of real;` Nmax étant une constante suffisamment grande pour mener les calculs qui suivent. Un polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ est alors représenté par le tableau $[a_0, a_1, \ldots, a_d, 0, \ldots, 0]$, de type `polynome`
Écrire les procédures ou fonctions suivantes en Pascal (elles peuvent s'appeler les unes les autres) :
   (a) la procédure `Ptcarre` prenant en paramètre un polynôme P et calculant dans un second paramètre Q le polynôme $P(X^2)$;
   (b) une procédure `primitive` prenant en paramètre un polynôme P et calculant dans un second paramètre Q la primitive s'annulant en 0 du polynôme P ;
   (c) une procédure `recurrence` prenant en paramètre un polynôme P, et calculant dans un second paramètre Q le polynôme défini par

   $$Q(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (P(t) + P(t^2))\ \mathrm{d}t;$$

   (d) une procédure `F` prenant en paramètre un réel e, et calculant dans un paramètre `approxf` un polynôme P donnant une approximation ponctuelle de la fonction f à la marge d'erreur e près sur I, c'est-à-dire vérifiant :

   $$\forall x \in I, \quad |P(x) - f(x)| \leqslant e.$$

   (e) une fonction `Fx` prenant en paramètre un réel x et un réel e, et calculant la valeur de $f(x)$ à la marge d'erreur e près.