DM n° 10 : Algèbre bilinéaire

Exercice 1 – (Exercice technique)

Les questions sont indépendantes.

- Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer une base orthonormale de F .
 - Déterminer une base quelconque, puis une base orthonormale de $F^\perp$.
 - Exprimer la matrice M de la projection orthogonale sur F relativement à la base canonique, ainsi que la matrice N de la projection orthogonale sur $F^\perp$ relativement à la base canonique.
- Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer une base orthonormale de F .
 - En déduire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .
 - Retrouver cette matrice en revenant à la définition du projeté orthogonal.
- Soit $\varphi : (P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]^2$.
 - Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
 - Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Problème –

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n , on rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1.

On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = Q$ défini par l'égalité $Q = (X - 1)P' - XP''$.

Partie I – Étude de φ

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $\varphi(X^j)$.
 - Écrire la matrice M de φ dans $\mathcal{B}$.
 - En déduire que φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés
- Pour tout k élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, justifier l'existence et l'unicité d'un unique polynôme unitaire, que l'on notera L_k , tel que $\varphi(L_k) = kL_k$.

On note $L_k = \sum_{i=0}^p a_i X^i$, avec $a_p = 1$.

- Montrer que $p = k$, c'est-à-dire que L_k est de degré k .
 - Déterminer L_0 .
 - Écrire, lorsque k est supérieur ou égal à 1, le système d'équations donc $(a_0, \dots, a_{k-1})$ est solution.
 - En déduire que : $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $a_i = (-1)^{k-i} (k-i)! \binom{k}{i}^2$.
- On note f_k la fonction réelle définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x).$$

Partie II – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

1. P et Q étant des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\Psi(P, Q) = \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx.$$

- Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.
- Vérifier que l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ est convergente.
- Montrer que Ψ est un produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$. Exprimer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que : $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $f_k^{(i)}(0) = 0$, f_k étant la fonction définie à la question I-3.

Soit k un entier naturel non nul. Les fonctions f et g étant de classe C^k sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on rappelle la formule d'intégration par parties d'ordre k :

$$\int_a^b f(t) g^{(k)}(t) dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f^{(j)}(t) g^{(k-j-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t) g(t) dt.$$

3. Soit i et k deux entiers naturels.

(a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\int_0^x L_i(t) f_k^{(k)}(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j L_i^{(j)}(x) f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t) f_k(t) dt.$$

(b) En déduire que $\int_0^{+\infty} L_i(t) L_k(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t) dt$.

(c) Montrer que, pour le produit scalaire Ψ , la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Déterminer la norme de L_k , notée $\|L_k\|$, puis donner une base orthonormale $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III – Étude des racines de L_n

On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1.

On pose $R(x) = \prod_{j=1}^p (x - x_j)$, où $x_1, \dots, x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre impair de L_n . On convient que $R(x) = 1$, si L_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}^+$.

- Montrer que RL_n est positif sur $\mathbb{R}^+$.
- On suppose dans cette question que $p < n$.
 - En remarquant que R est élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $\langle R, L_n \rangle = 0$. (On pourra utiliser une certaine base orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$)
 - En déduire que RL_n est le polynôme nul
- En notant la contradiction obtenue en 2(b), conclure que $p = n$.
 - En déduire que L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.

Problème –

Soit $n \in \mathbb{N}$; $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle « trace de A », et on note $\text{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A .

On admet que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN)$.

Soit A une matrice symétrique, on considère :

- l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi_A(M) = AM - MA$,
- les ensembles $\text{Sp}(A)$ et $\text{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs propres de A et de Φ_A respectivement,
- l'ensemble $\Gamma = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A)^2\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A .

Le but de cet exercice est d'établir les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme diagonalisable,
- les valeurs propres de Φ_A forment l'ensemble Γ c'est-à-dire que $\text{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

On **admettra** que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres, et que la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale vérifie $Q^{-1} = {}^tQ$ (on dit que Q est une matrice orthogonale). En particulier, les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Partie I – Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet les trois propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
- la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $\langle -, - \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Justifier que la matrice T de Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit : $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En déduire la diagonalisabilité de T .

2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de T
3. Déterminer une base de l'espace propre associé à 0 de la matrice T .
4. Calculer TX_1 et TX_2 , où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Expliciter alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $T = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1} , mais on justifiera soigneusement l'obtention de cette égalité)
6. Expliciter une matrice orthogonale Q telle que $T = QD {}^tQ$. (Voir fin de l'introduction du problème pour la notion de matrice orthogonale)
7. (a) Déterminer une base orthonormale de l'image de Φ_A .
 (b) Déterminer la matrice dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) de la projection orthogonale sur l'image de Φ_A .
 (c) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Justifier l'existence et l'unicité d'une matrice N de $\text{Im}(\Phi_A)$ telle que $\|M - N\|$ soit minimal (la norme considérée étant celle associée au produit scalaire défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Déterminer N ainsi que la distance de M à l'espace vectoriel $\text{Im}(\Phi_A)$.

Partie II – Réduction de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que l'application $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle M, N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Établir que, pour toutes matrices M, N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \Phi_A(M), N \rangle = \langle M, \Phi_A(N) \rangle.$$

En déduire que $\varphi : (M, N) \mapsto \langle \Phi_A(M), N \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis que la matrice de Φ_A dans une base quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique.

En déduire que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.

4. Soient :

- $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ ,
- $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ .

On pose alors :

$$M_{X,Y} = X {}^t Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$, puis que ${}^t Y A = \mu {}^t Y$
 - Établir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$, puis que $\Gamma \subset \text{Sp}(\Phi_A)$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α .
- On suppose que pour tout vecteur propre Z de A , on a $MZ = 0$.
Montrer alors que $M = 0$. (On pourra considérer une base formée de vecteurs propres)
En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
On note μ la valeur propre associée à Z_0 .
 - En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ .
 - Conclure

Partie III – Étude du rang de Φ_A

- Soient $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que la famille $(M_{X_i, Y_j} = X_i {}^t Y_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soient X, X', Y, Y' des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $X \perp X'$ ou $Y \perp Y'$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Montrer que $M_{X,Y} \perp M_{X',Y'}$ pour le produit scalaire défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'introduction du problème.
 - Soit X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X\| = \|Y\| = 1$. Montrer que $\|M_{X,Y}\| = 1$ (pour la norme associée au produit scalaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
 - En déduire que si $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ sont deux familles orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $(M_{X_i, Y_j} = X_i {}^t Y_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit λ une valeur propre de A , et soit n_λ la dimension du sous-espace propre E_λ de A associé à la valeur propre λ . Soit $(X_1, \dots, X_{n_\lambda})$ une base orthonormale de E_λ .
 - Montrer que $(X_i {}^t X_j)_{1 \leq i, j \leq n_\lambda}$ est une famille orthonormale de $\text{Ker}(\Phi_A)$. On note F_λ le sous-espace de $\text{Ker}(\Phi_A)$ engendré par ces vecteurs.
 - Déterminer la dimension de F_λ .
- Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A . Montrer que $F_\lambda \perp F_\mu$
- Justifier que $\text{Ker}(\Phi_A) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$
 - En déduire que $\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} n_\lambda^2$.
 - Quel est le rang de Φ_A lorsque A est de rang 1? lorsque A possède n valeurs propres distinctes?