DM n° 11 : Variables à densité

Exercice 1 – (exercice technique)
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0,1[, \\ a & \text{si } x \in [1,4[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
   Désormais, on suppose a égal à cette valeur, et X une variable de densité f.
2. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer une densité de $\ln(X)$.
4. Déterminer une densité de X^2.
5. Déterminer une densité de $(X-1)^2$.
6. Déterminer une densité de $(X-3)^2$.
7. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, indépendante de X. Déterminer une densité de $X+Y$.
8. Même question si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Exercice 2 – (EDHEC 2012)
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. (a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-xX_0$.
   (b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - xX_0$, la fonction f définie par :
   $$f(z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x+1} \mathrm{e}^{\lambda \frac{z}{x}} & \text{si } z < 0 \\ \frac{\lambda}{x+1} \mathrm{e}^{-\lambda z} & \text{si } z \geqslant 0. \end{cases}$$
   (c) On pose $T = \frac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.
2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.
   (c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que :
   $$\forall x < 0, \quad h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}.$$
4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.
   (a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leqslant X_0)$.
   (b) Montrer que $(Z = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leqslant X_0)$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(X = n)$ et $(Z = n)$ ont même probabilité.
5. Informatique.
   (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
   On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

(b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est « `function z:real;` » qui simule la loi de Z.

Exercice 3 – (HEC 2010)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ par la relation :

$$Y_1 = X_1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}.$$

1. Question de cours : Définition et propriétés du produit de convolution de 2 densités.
2. Reconnaître la loi de $\frac{X_n}{n}$.
3. Montrer que Y_2 possède une densité f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_2(x) = \begin{cases} 2\exp(-x)(1-\exp(-x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Exprimer Y_n en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
   Les variables Y_n et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?
5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, Y_n possède une densité f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \begin{cases} n\exp(-x)(1-\exp(-x))^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (on pourra raisonner par récurrence sur n)
   En déduire que Y_n et $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ont la même loi.
6. Calculer $E(Y_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini (on pourra utiliser une comparaison série-intégrale).

Problème – Étude du nombre de racines de certains polynômes à coefficients aléatoires

temps idéal : 1h30 à 2h

Partie I – Cas d'un polynôme de degré 2 (extrait de ESCP/EAP 2006)

On considère dans cette partie deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega).$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω.

1. Montrer que l'application M qui à tout ω de Ω associe $M(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z-1$.
   (a) Déterminer la loi de X_0
   (b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose :

$$Y_0 = -4X_0, \qquad Y_1 = X_1^2 \qquad \textit{et} \qquad Y = Y_1 + Y_0.$$

On note F_{Y_0}, F_{Y_1} et F_Y les fonctions de répartition de Y_0, Y_1 et Y, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout réel x :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{\frac{x}{8}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4} + \sqrt{t}\right)\right),$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

   (a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$

   (b) En déduie qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout réel x, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32}\mathrm{e}^{\frac{x}{8}} \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32}\mathrm{e}^{\frac{x}{8}} \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

5. On désigne par Φ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t.$$

   (a) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x)$? En déduire l'expression de $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ en fonction de $\Phi(x)$.

   (b) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t.$

   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t = 4\sqrt{\mathrm{e}} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ.

   (d) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{8}\mathrm{e}^{\frac{x}{8}}\left(1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)\right).$

   (e) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II – Cas d'un polynôme de degré 3

On considère dans cette partie deux variables aléatoires réelles X_2 et X_3 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant respectivement une loi uniforme sur $[-1, 1]$ et une loi uniforme sur $]0, 1]$ (ainsi, X_3 ne peut pas prendre la valeur 0)
Pour tout $\omega de \Omega$, on considère le polynôme R_ω d'indéterminée y, défini par :

$$R_\omega = y^3 + X_2(\omega)y^2 + X_3(\omega).$$

On désigne par $N(\omega)$ le nombre de racines réelles de R_ω.

1. Justifier que $N(\Omega) = \{1, 2, 3\}$
2. En étudiant les variations de la fonction polynomiale R_ω, montrer que $N(\omega) = 2$ si et seulement si $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) = 0$, et que $N(\omega) = 3$ si et seulement si $\dfrac{4}{27}X_2(\omega)^3 + X_3(\omega) < 0$
3. Déterminer la fonction de répartition de $\dfrac{4}{27}X_2^3$, et jusitifier qu'il s'agit d'une variable à densité. En déterminer une densité
4. Justifier que $Z = \dfrac{4}{27}X_2^3 + X_3$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
5. Justifier que $P(N = 2) = 0$, et déterminer la loi de N, ainsi que son espérance.