Pour le mercredi 10/10/2012

DM n^o 4 : Autour de la fonction Γ (DEVOIR FACULTATIF)

Ce devoir est destiné prioritairement aux élèves préparant les Parisiennes. Rien n'empêche les autres élèves de regarder tout de même au moins le début du problème et de me le rendre. Les devoirs facultatifs ne sont notés que si la note est au moins égale à 12.

Problème –

On rappelle que la fonction Γ est définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, pour tout x pour lequel cette intégrale converge.
Le problème a pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction Γ.

Partie préliminaire : quelques rappels

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.
2. Prouver que pour tout $x > 0$, on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?
3. En admettant la continuité de Γ, prouver que $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Partie I – Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Pour tout réel u tel que $0 \leqslant u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leqslant -u$.
   En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, l'inégalité : $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$, qui, à tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$, associe :
   $$\varphi(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$
   Établir, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité : $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.
   (c) Justifier, pour tout réel t de $[0, n]$, les inégalités : $\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   En déduire que, pour tout réel x strictement positif : $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
2. (a) Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,\mathrm{d}y$ sont convergentes.
   On pose alors $B_0(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,\mathrm{d}y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,\mathrm{d}y$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :
   $$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, la formule :
   $$B_n(x) = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$$

(c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+n) \underset{+\infty}{\sim} n^x(n-1)!$, lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II – Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

(b) Montrer que pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \leqslant 1 \\ t^{b-1} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

En considérant les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1})\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

(c) Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 et x deux éléments distincts de $]a,b[$. Établir l'inégalité :

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)g_1(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1})\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

(d) Établir que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\Gamma' = g_1$.

2. En s'inspirant de la question précédente, établir que Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\Gamma'' = g_2$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = -\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < \gamma_n \leqslant 1$.

(b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

4. (a) Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right] = \exp(-x\gamma_n) \times \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x n!}.$$

(b) On pose $v_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$. Montrer que la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}.$$

5. (a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que la série de terme général $\dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, est convergente.

(b) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $\ln(\ell(x)) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$.

6. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(\Gamma(x))]$.

   Établir, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.

   Donner un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$U_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

   On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

   (a) Montrer que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, exprimer pour tout réel x strictement positif, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

   (b) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Dans toute la suite du problème, **on admet** *les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif :*

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x) \qquad \text{et} \qquad A''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n''(x).$$

8. Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n - \psi(n))$.

9. On veut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \frac{1}{y}$.

   Soit x un réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui, à tout réel t strictement positif, associe $G(t) = \frac{1}{(t+x)^2}$.

   (a) Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$, G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} G(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) En déduire la double inégalité : $0 < \int_1^{+\infty} G(t)\ \mathrm{d}t < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k)$.

   (c) Établir l'inégalité : $\psi'(x) > \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}$. Conclure.

Partie III – Caractérisation de $\Gamma(x)$ par la convexité de $\ln(\Gamma(x))$

Le but de cette partie est d'établir que Γ est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) $f(1) = 1$;

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) = xf(x)$;

(iii) la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ *est définie et convexe sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Les deux premières propriétés ayant déjà été établies dans le préliminaire pour la fonction Γ, nous montrerons dans un premier temps que Γ vérifie aussi la troisième propriété. Nous montrerons ensuite réciproquement que si une fonction f vérifie ces trois propriétés, alors $f = \Gamma$.

1. **Préliminaire : formule de Cauchy-Schwarz pour les intégrales**

   (a) Soit x un réel strictement positif fixé. Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si toutes les intégrales intervenant dans cette relation sont convergente, on a

$$\lambda^2\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right) + 2\lambda\left(\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right) + \int_0^{+\infty} g^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

(b) En considérant le discriminant du polynôme en la variable λ de la question précédente, justifier que, sous réserve de convergence :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} g^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right).$$

(c) En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\left(\int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right).$$

2. Déduire de la question précédente que la fonction composée $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

Pour le reste de cette partie, on se donne une fonction f vérifiant les trois propriétés énoncées au début de cette partie, le but étant de montrer que $f = \Gamma$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n) = (n-1)!$.
4. Soit $x \in]0,1[$, et $k \geqslant 2$.

(a) Montrer que :

$$\ln(f(x+k)) \leqslant (1-x)\ln(f(k)) + x\ln(f(k+1)) \qquad \text{et} \qquad \ln(f(k)) \leqslant \frac{x}{1+x}\ln(f(k-1)) + \frac{1}{x+1}\ln(f(x+k)).$$

(b) En déduire que : $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\ln(i)\right) + x\ln(k-1) \leqslant \ln(f(x+k)) \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\ln(i)\right) + x\ln(k)$,

puis que : $\dfrac{(k-1)!(k-1)^x}{x(x+1)\cdots(x+k-1)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{(k-1)!k^x}{x(x+1)\cdots(x+k-1)}$

(c) En utilisant un résultat de la partie I, montrer que $f(x) = \Gamma(x)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f(x) = \Gamma(x)$.

Partie IV – Calcul d'une valeur approchée de $\ln(\Gamma(x))$

1. Soit $x \geqslant 1$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

(a) Justifier que $(\ln(u_n(x)))$ converge vers $\ln(\Gamma(x))$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

(c) En déduire que $(u_n(x))$ est croissante.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x)) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

En déduire qu'il existe c_1 dans $]0,\frac{1}{n}[$ et c_2 dans $]0,\frac{x}{n+1}[$ tels que

$$\ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x)) = \frac{x}{n} - \frac{x}{2n^2(1+c_1)^2} - \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)^2(1+c_2)^2}.$$

(e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \ln(u_{n+1}(x)) - \ln(u_n(x)) \leqslant \frac{x+x^2}{2n^2},$$

puis que pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant \ln(\Gamma(x)) - \ln(u_n(x)) \leqslant \frac{x+x^2}{2}\int_{n-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

et enfin que :

$$0 \leqslant \ln(\Gamma(x)) - \ln(u_n(x)) \leqslant \frac{x+x^2}{2(n-1)}.$$

2. Écrire une fonction en PASCAL, prenant en paramètre une valeur de x (supposée supérieure ou égale à 1), et un réel strictement positif `err`, et renvoyant la valeur de $\ln(\Gamma(x))$ à la marge d'erreur `err` près.
3. Expliquer comment modifier cette fonction pour qu'elle fournisse une valeur approchée de $\ln(\Gamma(x))$ à `err` près, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.