DM n° 5 : Intégrales impropres et un peu d'algèbre

Exercice 1 – (Exercice technique)

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \ln(1+x^3)\left(\sin\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}+\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Montrer la convergence des intégrales suivantes et les calculer :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(3+2x+x^2)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

3. Montrer la convergence des intégrales suivantes et les calculer :

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-4x^2+2x-2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_3^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}+2}\,\mathrm{d}t \qquad I_7 = \int_2^{+\infty} t^7\mathrm{e}^{-2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 – (Exercice technique) Déterminer, suivant la valeur des paramètres a et b dans $\mathbb{R}$, le rang des matrices suivantes. Déterminer une base de l'image et du noyau de l'endomorphisme canoniquement associé.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ b & 1 & b \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice M_2, on pourra remarquer que

$$1 - 3ab + a^3 + b^3 = (a+b+1)(1-b-a+b^2+a^2-ab),$$

puis montrer que si $(a,b) \neq (1,1)$, $a^2+b^2-ab-a-b+1 > 0$, en effectuant une mise sous forme canonique par rapport à la variable a (en considérant b comme une constante), puis par rapport à b.

Problème –

Partie I – Préliminaires

1. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Rappeler sans calcul la valeur de I_0. Calculer I_1.
4. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}I_n$.
5. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$
6. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.
7. Écrire une fonction en Pascal prenant en paramètre une valeur n, et calculant I_n. On privilégiera la relation de récurrence à la formule explicite.

Partie II – Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t \qquad et \qquad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}$.
   On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange
3. (a) Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.
   (b) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.
4. (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}S(x)$.
   (b) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\ \mathrm{d}t$.
   (c) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\ \mathrm{d}t$ et $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\ \mathrm{d}t$.

Partie III – Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

2. (a) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$: $0 \leqslant (1 - u + u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.
   (b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6$.
3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

Partie IV – Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

2. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.
   En déduire que la série de terme général u_p est convergente.
3. Étudier la nature de la série $\sum u_p x^p$, $x \in \mathbb{R}$.