DM n° 7 : Algèbre linéaire – DEVOIR FACULTATIF

Problème – (Étude de sous-espaces stables par un endomorphisme)

(ESCP-EAP Scientifique 2001)

L'objet de problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul, et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note 0_E le vecteur nul de E, et Id_E l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est ***stable*** *par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.*

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{0_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E, on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.

Si f est un endomorphisme de E, et si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Partie I – Préliminaire.

Soit f un endomorphisme de E.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} P(f)$ est stable par f.
2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

   (b) *On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est*
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.
3. *Soit p un entier naturel non nul.*

   (a) Si $F_1, \dots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

   (b) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f, et si $n_1, \dots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$ est stable par f.
4. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}_E$.

   (b) Quel lien y a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ? (justifier toute implication ou non-implication !)

   (c) Quel lien y a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

   (d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

   (e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.

5. (a) Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E.
   (b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et $H = \operatorname{Ker}\varphi$.
      i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément λ de $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
      ii. *On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E, et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et de $\mathbb{R}$.*
      Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité : ${}^tA\ {}^tL = \lambda\ {}^tL$.

Partie II – Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable.

Dans cette partie, *on considère un endomorphisme f de E diagonalisable, et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes, et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.*

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?
2. *On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f, et un élément x de F.*
   (a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, \dots, x_p)$ de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ vérifiant l'égalité $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$.
   (b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k$ est élément de F.
   (c) Montrer que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont tous dans F.
3. Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.
4. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur l'un de ses sous-espaces vectoriels stables F est un endomorphisme diagonalisable de F.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f. Quel est alors ce nombre ?

Partie III – Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n.

1. *On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.*
   (a) Déterminer les valeurs propres de D. L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?
   (b) Vérifier que D^n est l'endomorphisme nul, et que D^{n-1} ne l'est pas.
   (c) Vérifier que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont, en dehors du sous-espace vectoriel réduit au polynôme nul, les n sous-espaces vectoriels suivants : $\mathbb{R}_0[X]$, $\mathbb{R}_1[X], \dots, \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. *On considère un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n, c'est-à-dire vérifiant les conditions : $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.*
   (a) Établir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$) vaut 1 si $j = i + 1$, et 0 sinon.

(b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$) vaut i si $j = i+1$, et 0 sinon.

(c) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f. (Faites le rapprochement entre la question (2b) et la question 1.)

Partie IV – Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E nipotent d'ordre 2, c'est-à-dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul.

1. *On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E, vérifiant $F_2 \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.*
   (a) Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \operatorname{Ker} f$.
   (b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\operatorname{Ker} f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.
   (c) Étant donné A, B, C trois sous-espaces vectroriels de E, établir l'inclusion : $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A+B) \cap C$. A-t-on nécessairement l'égalité ?
   (d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f \cdot$
2. *Réciproquement, on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \operatorname{Ker} f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F.*
   Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \operatorname{Ker} f$, et prouver que l'intersection $F_2 \cap \operatorname{Ker} f$ est réduite au vecteur nul.
3. ***Dans cette question**, on suppose que l'entier n est égal à 4 (i.e. $E = \mathbb{R}^4$) et on considère l'endomorphisme h de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est la matrice M suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que les sous-espaces vectoriels $G_1 = \operatorname{Ker}(h - \mathrm{Id})^2$ et $G_2 = \operatorname{Ker}(h - 2\mathrm{Id})^2$ sont supplémentaires.
   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels stables par H sont exactement les sommes $H_1 + H_2$, où H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels de G_1 et de G_2 stables par h.
   (c) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par h.

Partie V – Existence d'un plan stable par un endomorphisme

Soit f un endomorphisme non nul de E.

1. Justifier l'existence d'un polynôme non nul à coefficients réels annulant f.
   On note M un polynôme non nul à coefficients réels de degré minimal annulant f. On observera que M n'est pas constant
2. *Dans cette question, on suppose que le polynôme M n'a pas de racine réelle, et on note z l'une de ses racines complexes.*

(a) Vérifier que le conjugué de z est aussi racine de M et en déduire qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels noté $X^2 + bX + c$ qui divise M.

(b) Montrer que l'endomorphisme $f^2 + bf + c\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

(c) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.

3. *Dans cette question, on suppose qu'il existe un réel* λ, *un réel* α *non nul et un entier* p *au moins égal à* 2 *vérifiant l'égalité :* $M = \alpha(X - \lambda)^p$. *On pose* $g = f - \lambda\mathrm{Id}_E$.

   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, g(x), \ldots, g^{(p-1)}(x))$ est libre.

   (b) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.

4. Montrer que, dans tous les cas, il existe un plan de E stable par f.