

Probabilité 1 – Probabilités générales, v.a.r.d.

Exercice 1 – J’ai des disques de n compositeurs. Je suppose que lorsque j’écoute un disque d’un compositeur donné, la probabilité que j’écoute un disque du même compositeur ensuite est $\frac{1}{2}$. La probabilité que j’écoute un disque d’un autre quelconque des compositeurs qui ornent ma CD-thèque est de $\frac{1}{2(n-1)}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le premier disque que j’écoute est de Bach. Probabilité que les k premiers disques écoutés soient de Bach.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le premier disque écouté est quelconque. Probabilité que les k premiers disques soient de compositeurs tous différents.
3. Le k -ième disque que j’écoute est de Bach.
 - (a) Probabilité que le $(k-1)$ -ième ait aussi été de Bach.
 - (b) Probabilité que les $(k-2)$ - et $(k-1)$ -ièmes aient été de Bach.
 - (c) Probabilité que le $(k-2)$ -ième ait été de Bach.

Exercice 2 –

1. On tire à Pile ou Face à l’aide d’une pièce équilibrée autant de fois qu’il faut pour obtenir Pile, les tirages successifs étant mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l’événement :
 A_n : « le premier Pile est apparu au n -ième tirage. »
 - (a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n .
 - (b) Montrer que la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet. Est-ce un système complet ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire n fois dans cette urne, chaque tirage étant uniforme sur l’ensemble des boules présentes dans l’urne, avec la modalité suivante :
 - si on tire une boule noire, on la remet dans l’urne,
 - si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l’urne.
 On définit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l’événement B_i : « la i -ème boule tirée est blanche. »
On définit B l’événement : « on tire exactement une boule blanche lors des n tirages »
 - (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la probabilité de l’événement $\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{j-1}} \cap B_j \cap \overline{B_{j+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}$.
 - (b) En déduire la probabilité de B
3. On effectue maintenant l’expérience suivante : on tire à Pile ou Face avec une pièce équilibrée jusqu’à obtenir pour la première fois Pile. On note n le nombre de tirages qu’il a fallu, et on effectue le tirage de la question 2 avec cette valeur de n .
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer exactement une boule blanche ?
 - (b) On tire exactement une boule blanche. Quelle est la probabilité d’avoir obtenu Pile au premier lancer ?

Exercice 3 – On se déplace sur les 4 sommets A , B , C et D d’un carré, AB étant horizontal. Au pas 0, on est en A . À chaque étape, on peut aller sur un sommet adjacent à celui sur lequel on se trouve, ou sur le sommet opposé. Les déplacements verticaux ont une probabilité p de se produire, les déplacements horizontaux une probabilité q , et les déplacements en diagonale, une probabilité r (avec $p + q + r = 1$)
Déterminer la probabilité de se retrouver en A , B , C ou D au n -ième pas.

Exercice 4 – Deux joueurs jouent une suite de parties avec une probabilité p de victoire pour A . Les parties sont indépendantes les unes des autres. Le jeu s’arrête dès que l’un des joueurs a gagné deux parties de plus que l’autre.

1. Justifier que si le jeu n’est pas fini au bout de $2n$ parties, alors les joueurs sont à égalité à ce moment.
2. Soit C_n l’événement : « les joueurs sont à égalité au bout de $2n$ parties » (ce qui sous-entend qu’il n’y a pas eu de vainqueur avant). Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $P(C_n)$ et $P(C_{n-1})$. En déduire $P(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Quelle est la probabilité que A gagne ? Que B gagne ?
4. Montrer que le jeu s’arrête presque sûrement.

Exercice 5 – Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n P(X > k) = \left(\sum_{k=1}^n kP(X = k) \right) + (n+1)P(X > n)$.
- (b) En déduire que si $\sum P(X > k)$ converge, alors : $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n kP(X = k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Conclure que X admet alors une espérance.

2. On suppose que X admet une espérance. Montrer que $\sum P(X > k)$ converge, et que sa somme vaut $E(X)$.
3. Une marque de gâteaux édite une collection de 4 autocollants différents, et en offre un au hasard dans chaque paquet de gâteaux. Une personne achète ces paquets de gâteaux et fait collection de ces autocollants. On suppose les achats indépendants. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité p_n qu'après avoir acheté n paquets, la collection d'autocollants ne soit pas complète.
Indication : On pourra considérer les événements A_i : « l'autocollant n° i n'est pas obtenu dans les n achats », et appliquer la formule du crible de Poincaré.
4. Soit X la v.a.r. égale au nombre minimal de paquets que doit acheter la personne pour avoir une collection complète d'autocollants.
 - (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X > n)$ en fonction de p_n .
 - (b) En utilisant les premières questions, montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 6 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire sans remise dans une urne contenant n boules noires, et n boules blanches, jusqu'à obtention de toutes les boules noires. X est la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires. Loi et espérance de X ?

Exercice 7 – n personnes jettent simultanément une pièce de monnaie ($n > 2$). Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour l'obtention d'un vainqueur. Déterminer X et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8 – Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. À chaque voyage, le nombre de personnes qui montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée est une v.a.r., notée X , suivant une loi de Poisson de paramètre λ . On émet les hypothèses suivantes :

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée.
 - Chaque personne choisit son étage au hasard et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.
- On note S le nombre d'arrêts de l'ascenseur lors d'un voyage donné (on ne compte pas l'arrêt initial au rez-de-chaussée)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que :

$$P(S = j \mid X = k+1) = \frac{j}{n} P(S = j \mid X = k) + \frac{n-j+1}{n} P(S = j-1 \mid X = k).$$

2. Après avoir justifié l'existence des espérances conditionnelles, montrer que

$$E(S \mid X = k+1) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(S \mid X = k).$$

3. Déterminer, pour tout entier naturel k , l'espérance de S sachant que $X = k$.
4. En déduire que $E(S) = n \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$

Exercice 9 – Deux joueurs A et B s'affrontent selon les modalités suivantes : Un des deux joueurs lance une pièce déséquilibrée (la probabilité d'obtenir Pile étant un certain réel $p \in]0, 1[$) jusqu'à obtenir Pile pour la première fois. Notant r le nombre de tirages nécessaires, les joueurs lancent alternativement la pièce, en commençant par le joueur B . Le joueur qui obtient le r -ième Pile de cette deuxième série de lancers donne k euros à l'autre joueur, k étant le nombre de tirages ayant été nécessaires pour obtenir le r -ième Pile lors de cette deuxième série de lancers. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier Pile dans la première phase du jeu. On note Y le gain du joueur A à l'issue de la partie, éventuellement négatif si A a perdu.

1. Déterminer la loi de X . Quelle est son espérance et sa variance ?
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Déterminer la loi de $|Y|$ conditionnée à l'événement $[X = r]$, puis celle de Y .
 - (b) Déterminer l'espérance de $|Y|$ sachant $[X = r]$.
 - (c) Déterminer l'espérance de Y sachant $[X = r]$.

3. En déduire l'existence et la valeur de $E(Y)$.

Exercice 10 – Une urne contient 1 boule blanche et 2 boules noires. On tire successivement des boules dans cette urne, avec remise si on tire la boule blanche, et sans remise si on tire une boule noire. Soit X le rang du tirage de la première boule noire, Y le rang de tirage de la seconde boule noire. On note $X = 0$ si on ne tire jamais de boule noire, on note $Y = 0$ si on ne tire jamais la 2e boule noire.

1. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la probabilité de $[Y = n]$, et justifier que l'événement $[Y = 0]$ est quasi-impossible.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 11 – On effectue une première série de lancers d'une pièce équilibrée, et on note N le rang du premier Pile obtenu. On effectue alors une seconde série de N lancers, et on note X le nombre de Pile obtenus lors de cette série.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de N .
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .

Exercice 12 – k urnes numérotées de 1 à k contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n . On extrait une boule de chaque urne. On note X_i la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée dans l'urne i . On définit la v.a.r. Y par $Y = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$.

1. Calculer la fonction de répartition de Y .
2. En déduire la loi de Y .
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction des sommes $S_{k,n} = \sum_{i=1}^n i^k$. Expliciter dans le cas où $k = 2$ ou $k = 3$.

Exercice 13 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et F_X sa fonction de répartition. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx.$$

Exercice 14 – (adapté de ESC 2005)

Dans tout l'énoncé, S désigne un entier naturel non nul fixé. Une urne contient $4S$ boules indiscernables au toucher : S boules rouges, S boules vertes et $2S$ boules bleues.

On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, avec le protocole suivant :

- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, et on remet à sa place une boule bleue.
- Si la boule tirée est verte, on la remet dans l'urne
- Si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, et on remet à sa place une boule rouge.

On note, pour tout entier naturel non nul n , X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après le n -ième tirage, et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S .

1. Déterminer la loi de X_1 et de X_2 et calculer leurs espérances
2. On suppose que $n \geq 2S$, de sorte que $X_n(\Omega) = \{0, \dots, 3S\}$.
 - (a) Soit $k \in [0, 3S]$. Quelle est la composition de l'urne lorsque l'événement $[X_n = k]$ se réalise ? En déduire la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $[X_n = k]$ (on pourra séparer les cas $k = 0$, $k = 3S$ et $k \in [1, 3S - 1]$).
 - (b) En déduire que pour tout $n \geq 2S$, $E(X_{n+1}) = (1 - \frac{1}{2S}) E(X_n) + \frac{3}{4}$
 - (c) En déduire, pour tout $n \geq 2S$, l'expression de $E(X_n)$ en fonction de $E(X_{2S})$, de S et de n .
 - (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \frac{3}{2} \cdot S$
3. Écrire une fonction Pascal prenant en paramètre un entier S et un entier n , et renvoyant la valeur de X_n obtenue lors d'une simulation de la réalisation d'une expérience telle que ci-dessus. Précisez ce qu'il ne faut pas oublier dans le corps de programme pour que cette fonction soit une simulation correcte de cette expérience.

Exercice 15 – (ESCP 2009)

On considère une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que pour tout $n \geq 1$, U_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, où $p \in [\frac{1}{2}, 1[$.

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable X_n par : $X_n = 2U_n - n$.

- Pour $s \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Y_{s,n}$ par : $Y_{s,n} = e^{-sX_n}$.
 - Montrer que l'on a $E(Y_{s,n}) = (pe^{-s} + qe^s)^n$, où $q = 1 - p$.
 - Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ et montrer que l'on a, pour tout réel $s \geq 0$: $P(X_n \leq 0) \leq E(Y_{s,n})$.
 - Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $P(X_n \leq 0) \leq (2\sqrt{pq})^n$. On pose $r = 2\sqrt{pq}$. Vérifier que $r < 1$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire Z_n en posant :

$$Z_n = \inf(0, X_1, \dots, X_n).$$

- Montrer que $Z_n(\Omega) \subset [-n, 0]$ et calculer la probabilité $P([Z_n = -n])$.
- Soit $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On considère l'événement $A_k = \bigcup_{i=k+1}^n [X_i \leq 0]$.
Montrer que $P(A_k) \leq \frac{r^{k+1}}{1-r}$.
- Soit $i \in \llbracket -n, 0 \rrbracket$. Prouver que l'on a :

$$P(Z_n = i) \leq P(A_k \cap (Z_n = i)) + P(Z_k = i).$$

- En déduire que, pour tout $k < n$, on a : $\frac{E(Z_n)}{n} \geq -P(A_k) + \frac{E(Z_k)}{n}$.
- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Z_n)}{n} = 0$.

Exercice 16 – (ESCP 2009) Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
- Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 1 - (1 - x)e^x$. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.
- Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f(\frac{\lambda}{n})$.
Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, soit X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_i = U_i = 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X_i .

- Montrer que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $P(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$.
- En déduire $\lim P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = Y_i]\right)$.

Exercice 17 – (QC ESCP 2011)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$, telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $[(X = -n) \cup (X = n)]$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relative à A_n . Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} E_{A_n}(X)P(A_n)$.

La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Exercice 18 – On dispose d'une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules avec remise, et on note m le nombre de boules rouges tirées. On tire ensuite dans une urne contenant v boules vertes et j boules jaunes, m fois avec remise. On note X le nombre de boules jaunes tirées.

- Déterminer l'espérance de X , sans calculer la loi de X .
- Même question si la deuxième série de tirages s'effectue sans remise.
- Même question si la première série (mais pas la deuxième) s'effectue sans remise.
- Même question si les deux séries s'effectuent sans remise.