Probabilité 3 – Variables aléatoires à densité

Exercice 1 – Parmi les fonctions suivantes, lesquelles définissent la fonction de répartition d’une variable aléatoire à densité ? Déterminer dans ce cas une densité associée, ainsi que l’existence et la valeur de l’espérance.

- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2^{n+1}} + 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \in]n, n+1], n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = a(\text{Arctan } x + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$

Exercice 2 – Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des densités d’une variable aléatoire à densité ? Dans ce cas, déterminer la fonction de répartition associée. Étudier l’existence et la valeur de l’espérance et de la variance. Déterminer la fonction de répartition et une densité de $|X|, X^2, \exp(X), \ln |X|.$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \beta x^\alpha & \text{si } x > 1, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin x + 1.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{x^2 + x + 2}, a \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{ae^{-t}}{1+e^{-t}} & \text{si } x > 0, a \in \mathbb{R} \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{(x^2 + 1)^2}, a \in \mathbb{R}$
- Soit $n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ et } x \geq n \\ aE(x) & \text{si } x \in]0, n[, a \in \mathbb{R} \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ (\frac{a}{E(x)^2}) & \text{si } x > 1, a \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exercice 3 – Soit pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{x^2+1}.$

- Déterminer a pour que f soit une densité.
- Déterminer une densité de e^X
- Déterminer une densité de X^2
- Déterminer une densité de $X^2 + 2X + 2$
- Déterminer une densité de $X^4 + 2X^2 + 2.$

Exercice 4 – Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [0, 1[$, $f(x) = x - 1$ si $x \in [1, 2[$ et $(x - 2)^5$ si $x \in [2, 3[$, et $f(x) = 0$ sinon, est une densité de probabilité. Exprimer la fonction de répartition d’une variable aléatoire de densité $f.$

Exercice 5 – Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$

- (a) Prouver que F est la fonction de répartition d’une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité.
(b) Étudier l’existence de l’espérance et de la variance de $X.$
(c) Calculer l’espérance de $X.$
- On pose $Y = \frac{e^X+1}{e^X-1}.$
(a) Déterminer la fonction de répartition de $Y.$
(b) Déterminer une densité de $Y.$ La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-t}$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f .
2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
3. Déterminer la loi de la v.a.r. discrète $\lfloor X \rfloor$ (partie entière)
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable $D = X - \lfloor X \rfloor$. En déduire que D est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.

Exercice 7 – Soit α un réel et f une fonction, définie par $f(x) = \alpha(1 + \cos x)e^{-|x|}$.

1. Comment choisir α pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X ?
2. Déterminer dans ce cas l'espérance et la variance de X .

Exercice 8 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$ indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 9 – Soit X et Y deux variables indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1]$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 10 – Soit $(U_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

On note $X = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (U_i)$ et $Y = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (U_i)$.

1. Déterminer une densité de X , son espérance et sa variance.
2. Mêmes questions pour Y .

Exercice 11 – Soit $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$, indépendantes.

1. Déterminer une densité de $\ln X$ et $\ln Y$
2. Déterminer une densité de $\ln X + \ln Y$
3. En déduire une densité de XY .
4. Déterminer de même une densité de $\frac{X}{Y}$
5. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une densité de $X - tY$.
6. En déduire la fonction de répartition de $\frac{X}{Y}$, puis retrouver l'expression d'une densité de $\frac{X}{Y}$.

Exercice 12 – (d'après EDHEC 2008)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note F_X (respectivement F_Y) la fonction de répartition de X (respectivement Y).

- (a) Déterminer une densité de X^2 (on vérifiera en particulier que X^2 est une variable à densité)
- (b) Déterminer une densité de $-Y$.
- (c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13 – Soit X, Y et Z des variables mutuellement indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{U}([0, 1])$, $\mathcal{U}([0, 2])$ et $\mathcal{U}([0, 3])$. Déterminer une densité de $X + Y + Z$.

Exercice 14 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-2, 1])$.

1. Soit $Z = X^2$. Après avoir justifié leur existence, calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
2. Déterminer une densité de Z , et retrouver la valeur de $E(Z)$ à l'aide de cette densité.

Exercice 15 –

1. Comment choisir a pour que la fonction f suivante soit une densité de probabilité :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{a}{(x+1)(x+2)(x+3)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de la question précédente, et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 16 – (Loi de Weibull)

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et F la fonction définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-(\frac{x}{b})^a} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant F comme fonction de répartition. Déterminer une densité de X .
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$, après avoir justifié leur existence (on exprimera le résultat à l'aide de la fonction Γ).
4. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, calculer $E(X^n)$ (on exprimera le résultat à l'aide de la fonction Γ)

Exercice 17 – (Loi de Cauchy)

Soit X une variable de densité f , supposée continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \frac{1}{X}$.

1. Montrer que Y est une variable de densité g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$, et $g(0) = 0$.
2. Démontrer que la v.a.r. Y possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge absolument, et que dans ce cas,

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

3. On considère le cas particulier où $f : t \mapsto \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Montrer que f est une densité de probabilité. Soit alors X une variable de densité f . On dit que X suit la loi de Cauchy de paramètre a .
 - (b) Préciser une densité g de la variable $Y = \frac{1}{X}$. Étudier l'existence de l'espérance des variables X et Y .
 - (c) Calculer $P(X^2 - aX < 0)$.
4. On considère X et Y deux variables indépendantes, de même loi de densité f définie dans la question précédente, dans le cas particulier où $a = 1$.
 - (a) En revenant à la définition, montrer que la variable $X_1 = \ln|X|$ est une variable à densité, et déterminer sa densité.
 - (b) Soient α et β deux réels distincts, déterminer α' et β' deux réels dépendant de α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\alpha'}{x-\alpha} + \frac{\beta'}{x-\beta}.$$

- (c) Montrer que la variable $\ln|XY|$ est une variable continue dont une densité k est définie par $k(x) = \frac{4xe^x}{\pi^2(e^{2x}-1)}$ si $x \neq 0$, et $k(0) = \frac{2}{\pi^2}$.
5. (a) Montrer que la variable $T = |XY|$ est une variable à densité, et en déterminer une densité.
 - (b) En déduire la convergence et la valeur des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$ et $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

Exercice 18 – (Oral ESCP)

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0, 1[$, possédant une densité g continue sur $]0, 1[$. Montrer que Z possède une espérance.
On suppose de plus que pour tout $x \in]0, 1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de Z ?

- Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $] -1, 1[$, et calculer sa dérivée.
- Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale converge et la calculer
Indication : faire une mise sous forme canonique de l'expression sous la racine, pour vous ramener à la dérivée de φ .
- Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

- Soit X une variable aléatoire admettant cette densité.
 - Déterminer $E(X)$ en utilisant la première question.
 - Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = \sin^2 \theta$.

Exercice 19 – (QC ESCP) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X . Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx) f(x) dx.$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

Exercice 20 – On considère deux variables aléatoires réelles X et Y , définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1.

- Soit t un réel strictement positif. Montrer que la variable $Y - tX$ admet pour densité l'application h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \frac{Y}{X}$.
- Déterminer la loi de la variable $U = \frac{X}{X+Y}$.
- Déterminer une densité de $V = \frac{X^\alpha}{X^\alpha+Y}$, $\alpha > 0$.

Exercice 21 – On choisit au hasard sur le cercle trigonométrique deux points A et B , ce qui signifie que l'on choisit deux angles α et β de façon indépendante et uniforme sur $[-\pi, \pi[$, les points A et B étant les points représentés dans le plan complexe par $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ respectivement. On se propose de calculer la probabilité que la longueur AB soit inférieure ou égale à 1, cet pour ce faire, on note X la variable aléatoire égale à la longueur AB .

- Montrer que $P(X \leq 1) = P(\cos(\alpha - \beta) \geq \frac{1}{2})$
- Trouver une densité de $\alpha - \beta$, puis déterminer $P(X \leq 1)$.
- Soit Y la variable aléatoire prenant l'unique valeur de $[-\pi, \pi[$ congrue à la valeur prise par $\alpha - \beta$ modulo π . Déterminer une densité de Y et commenter le résultat. Retrouver le résultat de la question 2.
- Montrer que $X = 2 \sin \frac{|Y|}{2}$.
- Montrer que X admet une espérance et une variance, et les calculer.
- Déterminer une densité de X (on pourra utiliser la fonction Arcsin, réciproque de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dont on déterminera la dérivée)