Probabilité 4 – Variables aléatoires à densité (technique et entraînement)

Exercice 1 – Déterminer α pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\alpha}{1+x+x^2}$ définisse une densité. Exprimer la fonction de répartition d'une variable de densité f.

Exercice 2 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \lambda 2^{-x}$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = \mu 2^x$ si $x < 0$, où λ et μ sont deux réels.

1. Quelles relations doivent vérifier λ et μ pour que f soit une densité de probabilité ?
2. Peut-on déterminer λ et μ pour qu'une variable X admettant f pour densité soit centrée ?
   On suppose désormais que λ et μ sont choisis de la sorte.
3. Montrer que la v.a.r. X de densité f admet une variance et la calculer.
4. Déterminer la fonction de répartition de X.
5. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$. Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.

Exercice 3 –

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,2])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1,4])$, indépendantes. Déterminer une densité de $X+Y$.
2. Même question si plus généralement $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}[c,d]$.

Exercice 4 – Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{6}\lfloor x+1 \rfloor$ si $x \in [0,3[$, et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité égale à f, et soit Y une variable suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer une densité de $X+Y$.
3. Même question si Y suit une loi exponentielle de paramètre 2.

Exercice 5 –

1. Déterminer a pour que f définie par $f(x) = a$ si $x \in [0,1[$, $f(x) = 3a$ si $x \in [1,2[$, et $f(x) = 0$ sinon soit une densité de probabilité.
   Dans la suite de l'exercice, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes admettant f pour densité.
2. Après avoir justifié leur existence, déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer une densité de $X+Y$.
4. Soit $Z = (\mathrm{e}^X - 2)^2$. Après avoir justifié son existence, calculer $E(Z)$.
5. Déterminer une densité de Z.

Exercice 6 – (Questions indépendantes)

1. Déterminer une densité de $X-Y$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Cauchy (de densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2+1)}$) et une loi uniforme sur $[0,1]$ (on pourra commencer par déterminer une densité de $-Y$)
2. Déterminer une densité de XY lorsque X et Y sont deux variables indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ (on pourra commencer par déterminer une densité de $\ln X$ et de $\ln Y$)
3. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, mutuellement indépendantes. Déterminer une densité de $X+Y+Z$.

Exercice 7 – Soit X, Y et Z des variables à densité mutuellement indépendantes, suivant des lois uniformes sur $]0,1]$.

1. Déterminer une densité de $X+Y+Z$.
2. Justifier que $\ln X$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
3. Déterminer une densité de $\ln X + \ln Y + \ln Z$.
4. En déduire une densité de XYZ.

Exercice 8 – Soit a un réel, et soit f la fonction définie sur $]-1,3]$ par $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x+1}}$, et nulle sinon.

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité. On note par la suite X une variable aléatoire de densité égale à f.
2. Après avoir justifié leur existence, calculer $E(X)$ et $V(X)$ (on pourra commencer par calculer $E(X+1)$).
3. Déterminer une densité de e^X
4. Déterminer une densité de X^2.

Exercice 9 – Soit f définie sur $[0,1[$ par $f(x) = a(x-1)^2$, sur $[1,2[$ par $f(x) = x-1$, et par $f(x) = 0$ partout ailleurs.

1. Déterminer a pour que f soit une variable à densité. On note X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer $E(X-1)$, puis $E(X)$. Calculer $V(X)$.
3. Déterminer $E(\sqrt{X})$.
4. Déterminer une densité de $E(\sqrt{X})$.
5. Soit X et Y indépendantes, admettant toutes deux f pour densité. Déterminer une densité de $X+Y$.
6. Déterminer une densité de $(X+Y-\frac{3}{2})^2$

Exercice 10 –

On rappelle qu'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$, et qu'une primitive de $x \mapsto x\ln x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{x^2}{4}$
Soit a un réel, et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a|x| & \textit{si } x \in [-1,3] \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

Soit B une variable aléatoire admettant f pour densité. Soit A une variable suivant une loi uniforme sur $]0,1]$ et C une variable suivant une loi uniforme sur $[1,2]$. On suppose que A, B et C sont mutuellement indépendantes. On considère le polynôme aléatoire $AX^2 + 2BX + C = 0$. Le but de cet exercice est de calculer la probabilité que ce polynôme n'admette pas de racine réelle.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $AC - B^2$ pour que $AX^2 + 2BX + C$ n'admette pas de racine réelle.
3. Après avoir justifié son existence, calculer $E(AC - B^2)$.
4. Déterminer une densité de $-B^2$.
5. Déterminer une densité de $\ln A + \ln C$.
6. En déduire qu'une densité du produit AC est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{AC}(x) = \begin{cases} \ln 2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \ln 2 - \ln x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. On admet que $AC - B^2$ est une variable à densité, dont une densité est notée h. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1+\ln 2}{10} - \frac{x\ln 2}{10} + \frac{x}{10} - \frac{(x+1)\ln(x+1)}{10} & \text{si } x \in [0,1], \\ \frac{2}{5} - \frac{(1+\ln 2)x}{5} + \frac{x\ln x}{5} & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

   (on ne demande pas de calculer h sur $\mathbb{R}_-$).
8. Exprimer la probabilité que $AX^2 + 2BX + C$ n'admette pas de racine réelle à l'aide d'une intégrale portant sur la fonction h, puis calculer cette probabilité.

Exercice 11 – Soit f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^{x} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \pi a \cos(\frac{\pi}{2}x) & \text{si } x \in]-1,1[\\ a\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité. On suppose désormais a choisi de la sorte, et X une variable de densité X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
4. Déterminer une densité de X^2, de X^2+1, de $(X+1)^2$.

Exercice 12 –

1. Déterminer a pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2+x+1) & \text{si } x \in [-4,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   soit la densité d'une variable aléatoire X.
2. Pour cette valeur de a, déterminer la fonction de répartition de X.
3. Justifier que X admet une espérance, et la calculer.
4. Déterminer la fonction de répartition et une densité de X^2.

Exercice 13 – Soit X suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et Y suivant une loi uniforme sur $[2,4]$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer une densité de $\sqrt{X}$ et de $\sqrt{Y}$
2. Calculer de deux façons $E(\sqrt{X})$ et $E(\sqrt{Y})$.
3. Déterminer avec un minimum de calculs $V(\sqrt{X})$ et $V(\sqrt{Y})$
4. Déterminer une densité de $\sqrt{X}+\sqrt{Y}$.
5. Calculer de deux façons $E(\sqrt{X}+\sqrt{Y})$ et $V(\sqrt{X}+\sqrt{Y})$,

Exercice 14 – Soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f et de fonction de répartition F. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est continue. On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout réel x positif : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x (1-F(t))\,\mathrm{d}t - xP(X > x)$.
2. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F(t))\,\mathrm{d}t$ converge.
   (a) Calculer φ' et en déduire que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que φ est majorée, et en déduire que X admet une espérance.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant xP(X > x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.
   (d) En déduire que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F(t))\,\mathrm{d}t$.
3. On considère la fonction F_n définie par : $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T_n.
   (b) Montrer que $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Exercice 15 – (EDHEC 2010)

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.

On pose $Z = |X - Y|$, et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Déterminer une densité de $-Y$

   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.

   (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.
4. Simulation informatique.
   On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction `random` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   Écrire une fonction `Z` simulant la variable aléatoire Z.

Exercice 16 – (EDHEC 2000)

1. La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.

   (a) On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction de répartition F, la probabilité $p(t, h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t + h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.

   (b) Établir que, lorsque h est au voisinage de 0^+, $p(t, h) \sim \dfrac{f(t)}{1 - F(t)} h$.

On pose désormais, pour tout réel positif t : $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}$.

On a bien sûr $\lambda_X(t) \geqslant 0$. La fonction λ_X est appelée taux de panne du composant, ou taux de panne de X.

2. Soit X une variable aléatoire qui possède une densité continue, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-$, et de taux de panne λ_X.

   (a) Pour tout réel strictement positif t, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda_X(u)\, du$, puis montrer que la seule connaissance de la fonction « taux de panne » permet de déterminer la fonction de répartition F de X.

   (b) Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant, et qu'elles sont les seules dans ce cas.

3. La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire X dont le taux de panne est la fonction λ_X définie par $\lambda_X(t) = t^3$.

   (a) Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?

   (b) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé déjà d'un an, survive au moins deux ans de plus ?