

Probabilité 5 – Lois continues classiques

Exercice 1 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 1.63) \quad P(X < 1.63) \quad P(X \leq -1.41) \quad P(X \geq -1.52) \quad P(1.536 \leq X < 1.624).$$

2. Calculer les seuils x définis par : $\Phi(x) = 0.9463$ $\Phi(x) = 0.0537$ $\Phi(x) = 0.830$

Exercice 2 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(7, 4^2)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $p(X < 7)$ $P(X \leq 12.12)$ $P(X < 8.26)$ $P(5.25 < X \leq 9.13)$.
2. Déterminer les seuils définis par : $P(X \leq x) = 0.9162$, $P(X > x) = 0.9418$, $P(-x + 14 < X < x) = 0.9418$.

Exercice 3 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 2)$. Déterminer une densité de $Y_1 = X^2$, de $Y_2 = \frac{1}{1+X^2}$, de $Y_3 = \frac{1}{1-X^2}$.

Exercice 4 – Soit $X \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$, $Y = \sqrt{X}$ et B une variable discrète prenant uniformément ses valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendante de X . Soit $Z = BY$.

1. Déterminer une densité de Y .
2. Déterminer une densité de Z (on pourra exprimer sa fonction de répartition, en considérant le système complet $([B = -1], [B = 1])$). Reconnaître la loi de Z et donner sans calcul son espérance et sa variance.
3. Donner plus généralement une densité de Z lorsque $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$, $(b, \nu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comment choisir b et ν pour que Z suive une loi normale centrée réduite ?

Exercice 5 – Soit n un entier naturel non nul. On considère $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Montrer que la variable $Z = \frac{X}{Y+1}$ est à densité. Déterminer une densité de cette variable.

Exercice 6 – On considère n variables aléatoires réelles $Z_1, \dots, Z_n$ indépendantes de même loi uniforme sur $]0, r]$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $W_i = \frac{1}{Z_i}$.

1. Déterminer la loi de W_1 (fonction de répartition et densité).
2. On définit $W = \inf(W_1, \dots, W_n)$. Déterminer la loi de W (fonction de répartition et densité)
3. Déterminer, par le calcul, l'espérance et la variance de W .

Exercice 7 – Soient U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$ et λ un réel strictement positif. On considère les variables aléatoires $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$, $W = \lfloor V \rfloor$, $Y = V - \lfloor V \rfloor$, et $Z = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$.

1. Déterminer les lois de V et W .
2. Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance.
3. Déterminer une densité de Z .
4. On considère la variable aléatoire $X = \min(1, V)$. Déterminer la fonction de répartition de X .

Exercice 8 – (Loi du khi-deux) Soit r un entier non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi du χ^2 à r degrés de liberté si X suit la loi $\Gamma(2, \frac{r}{2})$.

1. Déterminer l'espérance et la variance d'une variable X suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté.
2. (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, et tout entier n non nul,

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda e^{\lambda-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

- (b) Soient Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et X_{2n} une variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté. Montrer que $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.
- (c) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction F_6 , fonction de répartition d'une variable suivant la loi du χ^2 à 6 degrés de liberté. Préciser les valeurs de $F_6(0)$, $F_6(4)$ et $F_6(8)$.
3. Soient k un entier naturel non nul, et $X_1, \dots, X_k$ des variables indépendantes gaussiennes centrées réduites.
- (a) Déterminer la loi de X_1^2 .
- (b) En déduire la loi de $X_1^2 + \dots + X_k^2$.
- (c) Tracer sur un même graphe l'allure des fonctions de répartition de deux variables aléatoires, l'une suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté, l'autre suivant la loi du χ^2 à r' degrés de liberté, où r et r' sont deux entiers naturels non nuls tels que $r < r'$.

Exercice 9 – À l'instant $t = 0$, un piéton se trouve au bord d'une route à sens unique, qu'il désire traverser.

On note T_1 la variable aléatoire égale au temps qui s'écoule entre le début de l'expérience et le passage de la première voiture, puis, plus généralement, pour tout $i \geq 2$, T_i la durée entre le passage de la $i - 1$ -ième voiture et de la i -ième voiture. On suppose que les T_i sont mutuellement indépendantes, et suivent une loi exponentielle de paramètre λ . Prudent, le piéton décide de ne traverser à l'instant t que si la première voiture visible est éloignée de lui d'une distance supérieure à une certaine distance de sécurité. Le temps mis pour parcourir cette distance de sécurité (les voitures étant supposées rouler toutes à la même vitesse) est noté a .

On note X la variable aléatoire égale à l'instant où le piéton va traverser la route, c'est-à-dire l'instant de passage de la première voiture qui séparée de la suivante d'au moins la distance de sécurité. On note N le nombre de voitures qui passeront avant que le piéton puisse traverser.

On pose $p = e^{-\lambda a}$ et $q = 1 - p$.

- (a) Comparer $[X = 0]$ et $[T_1 > a]$. En déduire $P(X = 0)$ et $P(N = 0)$ en fonction de p .

(b) Pour $n \geq 1$, déterminer $P([T_1 \leq a] \cap \dots \cap [T_n \leq a] \cap [T_{n+1} > a])$ en fonction de p . En déduire la loi de N .

(c) Soit $n \geq 1$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $t > 0$, comparer les probabilités conditionnelles $P(T_i \leq t \mid N = n)$ et $P(T_i \leq t \mid T_i \leq a)$.
Déterminer $P(T_i \leq t \mid T_i \leq a)$ et en déduire une densité pour cette loi conditionnelle.
- (a) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer l'espérance $E(T_i \mid N = n)$.

(b) Déterminer l'espérance conditionnelle $E(X \mid N = n)$.

(c) En déduire l'espérance de X en fonction de a .

Exercice 10 – Soit λ un réel strictement positif. On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ .

Soit p un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

On note $S = \sum_{n=1}^N X_n$.

- Soit n un entier strictement positif. Déterminer une densité de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
- Montrer que $P(X_1 + \dots + X_n \leq x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \left(1 - e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \right)$.
- (a) Déterminer la fonction de répartition de S .

(b) En déduire la loi de S et montrer que $E(S) = E(X_1)E(N)$.

Exercice 11 – Des voyageurs arrivent de façon aléatoire dans la salle des pas perdus de la gare de Lyon. On suppose que la variable N_t égale au nombre de ces voyageurs arrivant entre les instants 0 et t , $t > 0$, suit une loi de Poisson de paramètre αt , où $\alpha > 0$.

- On note X_1 l'instant d'arrivée du premier voyageur.

(a) Déterminer $P(X_1 > t)$, puis reconnaître la loi de X_1 .

- (b) Donner sans calcul les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. (a) Soit X_n la v.a.r. égale à l'instant d'arrivée du n -ième voyageur. Montrer que :

$$\forall t > 0, \quad F_{X_n}(t) = 1 - e^{-\alpha t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

- (b) En déduire une densité f_n de X_n . Reconnaître la loi de X_n .
3. En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 12 – (ESCP 2009)

1. Soit a et b deux réels strictement positifs. Etablir l'existence de l'intégrale $\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$.
On note alors $J(a, b)$ cette intégrale.
2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{J(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

Si X est une variable aléatoire admettant f pour densité, on dit que X suit la loi $\beta(a, b)$.

3. On considère une variable X suivant la loi $\beta(p, q)$, où p et q sont deux entiers naturels non nuls.
- (a) Calculer $J(p, q)$.
- (b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X .
4. Pour n de $\mathbb{N}^*$, on considère n variables $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $Y_k(\omega)$ le k -ième des nombres $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, quand ceux-ci sont rangés dans l'ordre croissant.
On a donc par exemple :

$$Y_1(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \quad \text{et} \quad Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On admet que pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, Y_k est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables $X_1, \dots, X_n$.

On note, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, F_k la fonction de répartition de Y_k .

- (a) Donner les expressions de F_1 et de F_n .
- (b) Déterminer, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction de répartition de Y_k .
- (c) Déterminer une densité de Y_k ; reconnaître la loi de Y_k et donner son espérance.
(on remarquera que $j \binom{n}{j} = n \binom{n-1}{j-1}$ et que $(n-j) \binom{n}{j} = n \binom{n-1}{j}$).

Exercice 13 – (ESCP 2010)

Une puce se déplace dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $(0, e_1, e_2, e_3)$.

À l'instant 0, elle se trouve en l'origine $O = (0, 0, 0)$; à tout instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle effectue un déplacement $D_n = (D_{n,1}, D_{n,2}, D_{n,3})$.

On suppose que les trois variables aléatoires $D_{n,1}$, $D_{n,2}$ et $D_{n,3}$ sont indépendantes et suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On suppose de plus que tous les différents déplacements sont indépendants.

Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note $S_{n,i} = \sum_{k=1}^n D_{k,i}$ et $S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3})$.

On étudie l'événement $A_n = [S_n \in [-1, 1]^3]$.

1. (a) Déterminer la loi de $S_{n,1}$.
- (b) Exprimer la probabilité $P(|S_{n,1}| \leq 1)$ à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, et en déduire un équivalent de $P(|S_{n,1}| \leq 1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- (c) Déterminer un équivalent de $P(A_n)$ lorsque n tend vers l'infini.
2. (a) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a : $P\left(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)$.
- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$.
- (c) Déterminer $P\left(\bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)\right)$.
3. L'événement A_n se réalisera-t-il un nombre fini de fois ou une infinité de fois presque sûrement ?

Exercice 14 – Un tireur à l'arc effectue le lancer d'une flèche sur une cible plane de centre O , origine d'un repère orthonormal. On note X et Y les coordonnées du point d'impact de la flèche sur la cible, et on suppose que X et Y sont deux variables indépendantes, de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. (a) Montrer que $|X|$ est une variable continue, en déterminer une densité.
- (b) Montrer que $Z = |X| + |Y|$ est une variable continue dont une densité est la fonction g définie par :
- $$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} e^{-\frac{x^4}{4}} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-t^2} dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$; on considère le carré ABCD, dont les sommets sont définis par leurs coordonnées dans le repère orthonormal précédent par : $A : (a, 0)$; $B : (0, a)$; $C : (-a, 0)$; $D : (0, -a)$.
- (a) Déterminer la fonction dérivée de $K : x \mapsto \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-t^2} dt$.
- (b) Déterminer en fonction de $\Phi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ la probabilité que la flèche arrive à l'intérieur de ce carré.
- (c) Application numérique $a = 1$ (on donne $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707$).
3. (a) Déterminer des densités de X^2 et de Y^2 , puis de $X^2 + Y^2$.
- (b) En déduire la probabilité que la flèche soit à distance inférieure ou égale à a du centre de la cible.

Exercice 15 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$ indépendantes.

1. Espérance et variance de X et Y ?
2. Déterminer une densité de $X^2 + 4Y$.
3. Soit P le polynôme aléatoire en la variable z donné par $P(z) = z^2 + Xz - Y + \frac{1}{4}$. Quelle est la probabilité que le polynôme P ait deux racines réelles distinctes ?

Exercice 16 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2^2)$. Déterminer a tel que $P(|X| < a) = 0.9$

Exercice 17 –

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \hookrightarrow \gamma(2)$ indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y$
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $Y, Z \hookrightarrow \gamma(2)$, indépendantes. Déterminer une densité de $X + Y + Z$

Exercice 18 – Déterminer $I = \int_0^1 e^{-x^2-x} dx$ (on donne : $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.71$).