Probabilité 6 – Convergences

Exercice 1 – Un élève fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots. Donner une valeur approchée de la probabilité de faire plus de 5 fautes dans un devoir de 1500 mots. On donne $\mathrm{e}^{-3} \simeq 0.05$.

Exercice 2 – Un livre de 300 pages contient 400 « coquilles » réparties au hasard. Donner l'ordre de grandeur de la probabilité que dans une page déterminée, il y ait au moins trois erreurs. On donne $\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}} \simeq 0.26$.

Exercice 3 – On tire 50 fois sans remise dans une urne contenant 5 boules blanches et 995 boules noires. Donner une valeur approchée de la probabilité de tirer au moins 3 boules blanches. Application numérique : $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{41}{32} \simeq 0.9978$.

Exercice 4 – **(Oral HEC)** – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. de Bernoulli indépendantes de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n \cdot X_{n+1}$.

1. Loi de Y_n ? Indépendance et covariance des couples (Y_n, Y_m) ?
2. Soit $S_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$. Montrer que S_n converge en probabilité vers la variable certaine p^2.

Exercice 5 – Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi uniforme sur $[0, 1]$, et indépendantes. On considère la variable aléatoire $X_n = \inf(U_1, \dots, U_n)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle.

Exercice 6 – Soit $b > 0$, et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant pour densité la fonction f, nulle sur $]-\infty, b[$, et telle que :

$$\forall x \in [b, +\infty[, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-(x-b)}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$.

1. Justifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Étudier la convergence en probabilité de la suite (M_n).
3. Étudier la convergence en loi de la suite (M_n).

Exercice 7 – Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels à valeurs dans $[0, 1]$, soit $(X_i)_{i\times\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_i. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \qquad \text{et} \qquad m_n = \frac{1}{n}(p_1 + \cdots + p_n).$$

1. Prouver que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - m_n| < \varepsilon) = 1$.
2. Montrer que si $(m_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de limite m, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - m| < \varepsilon) = 1.$$

Exercice 8 – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, à valeurs dans l'ensemble $[\![-1, +\infty[\![$, et dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![-1, +\infty[\![, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{\mathrm{e}(k+1)!}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
2. Montrer que $P(S_n \leqslant 0) = 1 - \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^n t^n \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant 0) = \dfrac{1}{2}$
(On pourra utiliser le théorème de la limite centrée)

Exercice 9 – (ESCP 2009)

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ existent. On suppose, en outre, qu'il existe un réel m tel que :
$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = m \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0.$$
   (a) Montrer que : $E((X_n - m)^2) = V(X_n) + (E(X_n) - m)^2$.

   (b) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on a :
$$P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(V(X_n) + (E(X_n) - m)^2)$$
   (c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On lance n fois une pièce non équilibrée avec laquelle la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet est p.
Soit S_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de pile obtenus. Enfin, Y_n est la variable aléatoire définie par : $Y_n = e^{\frac{S_n}{n}}$.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

   (b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Exercice 10 – (QC ESCP 2009) Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$.
Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

Exercice 11 – (HEC 2010)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendnates et de même loi. On suppose qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que :
$$P([X_1 > x]) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^\lambda}.$$
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
$$\forall n \geqslant 1, \quad Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \ldots, X_n)$$
converge en loi vers une loi à déterminer.

Exercice 12 – (Oral HEC 2011)
Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.
2. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On considère deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires convergeant en probabilité, la première vers u, la seconde vers v.
Démontrer que la suite de variables aléatoires $(U_n + V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $u + v$.
3. Dans cette question, on suppose les réels u et v supérieurs ou égaux à 1.
   (a) Établir l'inégalité : $|\ln(u) - \ln(v)| \leqslant |u - v|$.

   (b) En déduire que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1, conevrgenant en probabilité vers u, la suite de variables aléatoires $(\ln(U_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln(u)$.

4. Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.
   (a) Établir, pour tout $t \in [0, x]$, l'inégalité : $\dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.
   (b) En déduire la limite de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$ quand l'entier n tend vers l'infini.
   (c) Démontrer l'égalité : $\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.
5. Dans cette question, p désigne un paramètre strictement compris entre 0 et 1.
   Soit X une variable aléatoire discrète telle que, pour tout entier k strictement positif, la probabilité que la variable X prenne la valeur k soit donnée par : $P([X = k]) = \dfrac{(1-p)^k}{k \ln\left(\frac{1}{p}\right)}$
   Le résultat de la question précédente, appliqué à $x = 1 - p$, prouve que X ne peut pas prendre d'autres valeurs.
   (a) Établir l'égalité : $\dfrac{E(X)}{E(X^2)} = p$, où E désigne l'espérance.
   (b) Démontrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, alors :
   $$\widehat{p_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_i)^2}$$
   est un estimateur convergent du paramètre p.

Exercice 13 – (exercice sans préparation HEC 2011)

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Quelle est la loi de S_n ?
   (b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P[S_n \geqslant n + \sqrt{n}]$?
2. On considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes des X_k et dont la loi est donnée par :
   $$P[N_n = n] = P[N_n = n+1] = \frac{1}{2}.$$
   (a) Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par :
   $$\forall \omega \in \Omega, \quad T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}.$$
   (b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P[T_n \geqslant n + \sqrt{n}]$?

Exercice 14 – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (discrète ou à densité), suivant toutes la même loi admettant une espérance m et une variance σ^2. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que si $|m - n| > k$, alors X_m et X_n sont indépendantes.
Montrer que $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

Exercice 15 –

1. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacunes la même loi que U. Soit d'autre part Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$. Montrer que la suite $(nZ_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable $Y = \mathrm{e}^{-\lambda X}$.

3. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

   (a) $A_n = n \cdot \min(\mathrm{e}^{-\lambda X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{-\lambda X_n})$;

   (b) $D_n = \max(X_1, \ldots, X_n) - \ln n$.