Algèbre – Chapitre 1

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

I. Espace vectoriel

I-1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1 (Espace vectoriel)

Un ensemble E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'il est muni d'une loi interne $(x, y) \in E^2 \mapsto x + y$ et d'une loi externe $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda \cdot x$ telles qu'on ait :

(i) associativité de $+$;

(ii) existence d'un élément neutre $0 = 0_E$ pour $+$;

(iii) existence des opposés pour $+$;

(iv) commutativité de $+$;

(v) “associativité” de $\cdot$;

(vi) compatibilité du neutre multiplicatif de $\mathbb{K}$;

(vii) distributivité de $\cdot$ sur $+$ de E ;

(viii) distributivité de $\cdot$ sur $+$ de $\mathbb{K}$.

Propriétés 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$;
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot x = -x$.

Propriétés 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$;
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot x = -x$.

Propriétés 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$;
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot x = -x$.

Propriétés 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$;
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot x = -x$.

Terminologie 1.3

- éléments de E = *vecteurs*
- éléments de $\mathbb{K}$ = *scalaires*
- Notion de colinéarité.

Proposition 1.4 (Espace vectoriel de référence)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble de fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 1.4 (Espace vectoriel de référence)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble de fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples 1.5

1. $\mathbb{K}^\varnothing = \{0\}$;

Proposition 1.4 (Espace vectoriel de référence)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble de fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples 1.5

1. $\mathbb{K}^{\varnothing} = \{0\}$;
2. $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]} = \mathbb{K}^n$;

Proposition 1.4 (Espace vectoriel de référence)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble de fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples 1.5

1. $\mathbb{K}^{\varnothing} = \{0\}$;
2. $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]} = \mathbb{K}^n$;
3. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$;

Proposition 1.4 (Espace vectoriel de référence)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble de fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples 1.5

1. $\mathbb{K}^{\varnothing} = \{0\}$;
2. $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]} = \mathbb{K}^n$;
3. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$;
4. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-ev ;

Définition 1.6 (Sous-espace vectoriel)

Un sous-ensemble F d'un ev E est un sev de E si $+$ et $\cdot$ de E laissent F stables et définissent par restriction une structure d'espace vectoriel sur F.

Définition 1.6 (Sous-espace vectoriel)

Un sous-ensemble F d'un ev E est un sev de E si $+$ et $\cdot$ de E laissent F stables et définissent par restriction une structure d'espace vectoriel sur F.

Théorème 1.7 (Caractérisation des sev)

Un ensemble F est un sev de E ssi :

(i) $F \subset E$

(ii) $F \neq \varnothing$

(iii) F stable par combinaison linéaire.

Définition 1.6 (Sous-espace vectoriel)

Un sous-ensemble F d'un ev E est un sev de E si $+$ et $\cdot$ de E laissent F stables et définissent par restriction une structure d'espace vectoriel sur F.

Théorème 1.7 (Caractérisation des sev)

Un ensemble F est un sev de E ssi :

(i) $F \subset E$

(ii) $F \neq \varnothing$

(iii) F stable par combinaison linéaire.

Exemples 1.8

$\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$...

Proposition 1.9 (Intersection de sev)

L'intersection de deux sev de E est un sev de E.

Proposition 1.9 (Intersection de sev)

L'intersection de deux sev de E est un sev de E.

FAUX pour l'union !

Proposition 1.9 (Intersection de sev)

L'intersection de deux sev de E est un sev de E.

FAUX pour l'union !

Proposition 1.10 (produit cartésien de sev)

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. Alors le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, muni des lois définies coefficient par coefficient.

I-2 Somme, somme directe

Définition 1.11 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

- La somme $E + F$ de deux sev de G est le plus petit sous-espace vectoriel de G, contenant F et G

I-2 Somme, somme directe

Définition 1.11 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

- La somme $E+F$ de deux sev de G est le plus petit sous-espace vectoriel de G, contenant F et G
- Plus généralement, la somme $E_1+\cdots+E_n$ de n sev de G est le plus petit sev de G contenant tous les E_i.

I-2 Somme, somme directe

Définition 1.11 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

- La somme $E+F$ de deux sev de G est le plus petit sous-espace vectoriel de G, contenant F et G
- Plus généralement, la somme $E_1+\cdots+E_n$ de n sev de G est le plus petit sev de G contenant tous les E_i.

Proposition 1.12 (Caractérisation de la somme)

(Peut être pris comme définition de la somme)

- $E+F=\{z\in G \mid \exists(x,y)\in E\times F, z=x+y\}$.

I-2 Somme, somme directe

Définition 1.11 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

- La somme $E+F$ de deux sev de G est le plus petit sous-espace vectoriel de G, contenant F et G
- Plus généralement, la somme $E_1+\cdots+E_n$ de n sev de G est le plus petit sev de G contenant tous les E_i.

Proposition 1.12 (Caractérisation de la somme)

(Peut être pris comme définition de la somme)

- $E+F=\{z\in G \mid \exists(x,y)\in E\times F, z=x+y\}$.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i=\{x_1+\cdots+x_n \mid x_1\in E_1,\dots,x_n\in E_n\}$.

Définition 1.13 (Somme directe)

- La somme $E + F$ est *directe*, et on note $E \oplus F$, si $E \cap F = \{0\}$.

Définition 1.13 (Somme directe)

- La somme $E+F$ est *directe*, et on note $E \oplus F$, si $E \cap F = \{0\}$.
- Plus généralement, $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si $E_1 \oplus E_2$, puis $(E_1 + E_2) \oplus E_3$, etc. On note $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Définition 1.13 (Somme directe)

- La somme $E+F$ est *directe*, et on note $E \oplus F$, si $E \cap F = \{0\}$.
- Plus généralement, $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si $E_1 \oplus E_2$, puis $(E_1+E_2) \oplus E_3$, etc. On note $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.14 (Caractérisation de la somme directe)

La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si et seulement si pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$F_k \cap \sum_{i<k} F_i = \{0\}.$$

Proposition 1.15 (2e caractérisation de la somme directe)

La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si l'application ci-dessous est injective :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n. \end{array}$$

Proposition 1.15 (2e caractérisation de la somme directe)

La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si l'application ci-dessous est injective :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E \\ & & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n. \end{array}$$

Cela signifie que tout élément x de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose de façon unique sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$, où $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

Définition 1.16 (Sous-espaces supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sev de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$.

Définition 1.16 (Sous-espaces supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sev de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$.

Théorème 1.17 (Existence des supplémentaires)

(résultat admis sauf dans le cas de la dimension finie)
Soit E un espace vectoriel quelconque, et F un sev de E. Alors F admet au moins un supplémentaire G.

I-3 Familles de vecteurs

Définition 1.18 (ev engendré par une famille finie)

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

I-3 Familles de vecteurs

Définition 1.18 (ev engendré par une famille finie)

$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$

Remarque 1.19

$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{R}x_1 + \cdots + \mathbb{R}x_n.$

I-3 Familles de vecteurs

Définition 1.18 (ev engendré par une famille finie)

$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$

Remarque 1.19

$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{R}x_1 + \cdots + \mathbb{R}x_n.$

Proposition 1.20 (ev engendré par une union de deux familles)

$\mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I \cup J}) = \mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I}) + \mathrm{Vect}((x_j)_{i \in J}).$

I-3 Familles de vecteurs

Définition 1.18 (ev engendré par une famille finie)

$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$.

Remarque 1.19

$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{R}x_1 + \cdots + \mathbb{R}x_n$.

Proposition 1.20 (ev engendré par une union de deux familles)

$\mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I \cup J}) = \mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I}) + \mathrm{Vect}((x_j)_{i \in J})$.

Par exemple, $\mathrm{Vect}(x, y, t) + \mathrm{Vect}(x, u, t, z) = \mathrm{Vect}(x, y, z, t, u)$.

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i \in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :

   (i) $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, \left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$;

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :
   (i) $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, \left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$;
   (ii) $\forall x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I}), \exists!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tq $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$;

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :
   (i) $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$, $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$;
   (ii) $\forall x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$, $\exists ! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tq $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$;
   (iii) (cas où $I = [\![1, n]\!]$) la somme $\mathbb{R}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}x_n$ est directe.

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :
   (i) $\forall(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I$, $\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0\right)\Longrightarrow(\forall i\in I,\lambda_i=0)$;
   (ii) $\forall x\in\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$, $\exists!(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I$ tq $x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$;
   (iii) (cas où $I=[\![1,n]\!]$) la somme $\mathbb{R}x_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}x_n$ est directe.
2. $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E ssi on a une des propriétés :

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :
   (i) $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$, $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$;
   (ii) $\forall x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$, $\exists! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tq $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$;
   (iii) (cas où $I = [\![1, n]\!]$) la somme $\mathbb{R}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}x_n$ est directe.
2. $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E ssi on a une des propriétés :
   (i) tout $x \in E$ est une combinaison linéaire des x_i, $i \in I$;

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :
   (i) $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I,\ \left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0\right) \implies (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$;
   (ii) $\forall x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I}),\ \exists! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tq $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$;
   (iii) (cas où $I = [\![1, n]\!]$) la somme $\mathbb{R}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}x_n$ est directe.
2. $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E ssi on a une des propriétés :
   (i) tout $x \in E$ est une combinaison linéaire des x_i, $i \in I$;
   (ii) $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I}) = E$;

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :
   (i) $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$, $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$;
   (ii) $\forall x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$, $\exists! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tq $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$;
   (iii) (cas où $I = [\![1, n]\!]$) la somme $\mathbb{R}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}x_n$ est directe.
2. $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E ssi on a une des propriétés :
   (i) tout $x \in E$ est une combinaison linéaire des x_i, $i \in I$;
   (ii) $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I}) = E$;
   (iii) (cas où $I = [\![1, n]\!]$) $E = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R}x_i$.

Définition 1.21 (familles libres, familles génératrices, bases)

1. $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** ssi on a une des propriétés équivalentes :
   (i) $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$, $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$;
   (ii) $\forall x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$, $\exists! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tq $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$;
   (iii) (cas où $I = [\![1, n]\!]$) la somme $\mathbb{R}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}x_n$ est directe.
2. $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E ssi on a une des propriétés :
   (i) tout $x \in E$ est une combinaison linéaire des x_i, $i \in I$;
   (ii) $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I}) = E$;
   (iii) (cas où $I = [\![1, n]\!]$) $E = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R}x_i$.
3. $(x_i)_{i\in I}$ est **base** de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Proposition 1.22 (Caractérisation de $\oplus$ par la liberté)

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des sev de E, non réduits à $\{0\}$. Alors $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ est directe si et seulement si pour tout $x_1 \in E_1 \setminus \{0\}, \ldots, x_n \in E_n \setminus \{0\}$, $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Proposition 1.22 (Caractérisation de $\oplus$ par la liberté)

Soit $E_1, \dots, E_n$ des sev de E, non réduits à $\{0\}$. Alors $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ est directe si et seulement si pour tout $x_1 \in E_1 \setminus \{0\}, \dots, x_n \in E_n \setminus \{0\}$, $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Proposition 1.23

Base $=$ famille libre maximale $=$ famille génératrice minimale

Proposition 1.22 (Caractérisation de $\oplus$ par la liberté)

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des sev de E, non réduits à $\{0\}$. Alors $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ est directe si et seulement si pour tout $x_1 \in E_1 \setminus \{0\}, \ldots, x_n \in E_n \setminus \{0\}$, $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Proposition 1.23

Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

La minimalité et la maximalité ne sont pas définies par le cardinal, mais par l'impossibilité d'enlever ou de rajouter un vecteur sans perdre la propriété de génération ou de liberté.

II. Espaces vectoriels de dimension finie

II-1 Notion de dimension.

Définition 2.1 (Espace de dimension finie)

dim finie = existence d'une famille génératrice finie.

II. Espaces vectoriels de dimension finie

II-1 Notion de dimension.

Définition 2.1 (Espace de dimension finie)

dim finie = existence d'une famille génératrice finie.

Proposition 2.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice de E, on peut extraire une famille génératrice finie.

Théorème 2.3 (Théorème de la base incomplète, version forte)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E par ajout de vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Théorème 2.3 (Théorème de la base incomplète, version forte)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E par ajout de vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Corollaire 2.4 (Finitude des familles libres)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E est de cardinal fini.

Corollaire 2.5 (Extraire une base d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. De toute partie génératrice de E on peut extraire une base.

Corollaire 2.5 (Extraire une base d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. De toute partie génératrice de E on peut extraire une base.
2. E admet au moins une base.

Corollaire 2.5 (Extraire une base d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. De toute partie génératrice de E on peut extraire une base.
2. E admet au moins une base.

Corollaire 2.6 (Thm de la base incomplète, version usuelle)

Toute famille libre d'un espace de dimension fini E peut être complétée en une base de E.

Théorème 2.7 (Théorème de la dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E sont finies et de même cardinal.

Théorème 2.7 (Théorème de la dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E sont finies et de même cardinal.

Définition 2.8 (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E de dimension finie Le cardinal commun de toutes les bases de E est appelé *dimension de E*, et est noté $\dim E$.

II-2 Dimension, liberté et rang

Définition 2.9 (Rang d'une famille de vecteurs)

$\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_k) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$.

II-2 Dimension, liberté et rang

Définition 2.9 (Rang d'une famille de vecteurs)

$$\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_k) = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_k).$$

Proposition 2.10

$\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_k) \leqslant k$,

II-2 Dimension, liberté et rang

Définition 2.9 (Rang d'une famille de vecteurs)

$\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_k) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$.

Proposition 2.10

$\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_k) \leqslant k$, avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre.

Proposition 2.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E est de cardinal au plus n ;
2. toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n.

Proposition 2.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E est de cardinal au plus n ;
2. toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n.

Proposition 2.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E est de cardinal au plus n ;
2. toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n.

Corollaire 2.12 (Caractérisation des bases par le cardinal)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E de cardinal n est une base de E ;
2. toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Proposition 2.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E est de cardinal au plus n ;
2. toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n.

Corollaire 2.12 (Caractérisation des bases par le cardinal)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E de cardinal n est une base de E ;
2. toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Proposition 2.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E est de cardinal au plus n ;
2. toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n.

Corollaire 2.12 (Caractérisation des bases par le cardinal)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E de cardinal n est une base de E ;
2. toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Corollaire 2.13 (dimension d'un sev)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$.

Proposition 2.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E est de cardinal au plus n ;
2. toute famille génératrice de E est de cardinal au moins n.

Corollaire 2.12 (Caractérisation des bases par le cardinal)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

1. toute famille libre de E de cardinal n est une base de E ;
2. toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Corollaire 2.13 (dimension d'un sev)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$. On a égalité si et seulement si $F = E$.

Théorème 2.14 (dim d'une somme directe de deux espaces)

Si F et G sont des sev de dimension finie d'un ev E, en somme directe : $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

Théorème 2.14 (dim d'une somme directe de deux espaces)

Si F et G sont des sev de dimension finie d'un ev E, en somme directe : $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

Corollaire 2.15 (dim d'une somme directe de n espaces)

Sous des hypothèses semblables : $\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

Théorème 2.14 (dim d'une somme directe de deux espaces)

Si F et G sont des sev de dimension finie d'un ev E, en somme directe : $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

Corollaire 2.15 (dim d'une somme directe de n espaces)

Sous des hypothèses semblables : $\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

Proposition 2.16 (Formule de Grassmann)

Soit F et G deux sous-espaces de dimension finie de E :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

III. Applications linéaires

III-1 Généralités

Définition 3.1 (Application linéaire)

Une application $f : E \to F$ entre deux $\mathbb{K}$-ev est appelée application linéaire, ssi

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

III. Applications linéaires

III-1 Généralités

Définition 3.1 (Application linéaire)

Une application $f : E \to F$ entre deux $\mathbb{K}$-ev est appelée application linéaire, ssi

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Définition 3.2

- $\mathcal{L}(E,F)$ = l'ensemble des applications linéaires de E vers F.
- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ = ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 3.3

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 3.3

$\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 3.4

La composée de deux AL est une AL.

Proposition 3.3

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 3.4

La composée de deux AL est une AL.

En particulier, cela permet de définir une loi interne sur $\mathcal{L}(E)$. Pour deux endomorphismes f et g de $\mathcal{L}(E)$, on note souvent simplement gf pour $g \circ f$, et f^n pour la composition itérée.

Proposition 3.3

$\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 3.4

La composée de deux AL est une AL.

En particulier, cela permet de définir une loi interne sur $\mathcal{L}(E)$. Pour deux endomorphismes f et g de $\mathcal{L}(E)$, on note souvent simplement gf pour $g \circ f$, et f^n pour la composition itérée.

Définition 3.5 (Forme linéaire)

Une forme linéaire est une AL de E dans $\mathbb{K}$.
Notation fréquente : $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$

III-2 Image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 3.6 (image et noyau)

1. Image de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\} = f(E)$;

III-2 Image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Définition 3.6 (image et noyau)

1. Image de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\} = f(E)$;
2. Noyau de f : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

III-2 Image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 3.6 (image et noyau)

1. Image de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\} = f(E)$;
2. Noyau de f : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

Lemme 3.7 (image directe et image réciproque d'un sev)

1. Soit E' un sev de E. Alors $f(E')$ est un sev de F.

III-2 Image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 3.6 (image et noyau)

1. Image de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\} = f(E)$;
2. Noyau de f : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

Lemme 3.7 (image directe et image réciproque d'un sev)

1. Soit E' un sev de E. Alors $f(E')$ est un sev de F.
2. Soit F' un sev de F. Alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E.

III-2 Image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Définition 3.6 (image et noyau)

1. Image de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\} = f(E)$;
2. Noyau de f : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

Lemme 3.7 (image directe et image réciproque d'un sev)

1. Soit E' un sev de E. Alors $f(E')$ est un sev de F.
2. Soit F' un sev de F. Alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E.

Corollaire 3.8

$\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E.

III-2 Image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 3.6 (image et noyau)

1. Image de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\} = f(E)$;
2. Noyau de f : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

Lemme 3.7 (image directe et image réciproque d'un sev)

1. Soit E' un sev de E. Alors $f(E')$ est un sev de F.
2. Soit F' un sev de F. Alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E.

Corollaire 3.8

$\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E.

Théorème 3.9 (caractérisation de l'injectivité)

f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

III-3 Isomorphismes

Définition 3.10 (isomorphisme, automorphisme)

1. Isomorphisme $=$ Une application linéaire bijective de E vers F.

III-3 Isomorphismes

Définition 3.10 (isomorphisme, automorphisme)

1. Isomorphisme $=$ Une application linéaire bijective de E vers F.
2. Deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.

III-3 Isomorphismes

Définition 3.10 (isomorphisme, automorphisme)

1. Isomorphisme $=$ Une application linéaire bijective de E vers F.
2. Deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.
3. Automorphisme $=$ isomorphisme de E dans lui-même.

III-3 Isomorphismes

Définition 3.10 (isomorphisme, automorphisme)

1. Isomorphisme $=$ Une application linéaire bijective de E vers F.
2. Deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.
3. Automorphisme $=$ isomorphisme de E dans lui-même.
   Ensemble des automorphismes de E : $\mathrm{Aut}(E)$ ou $\mathrm{GL}(E)$.

III-3 Isomorphismes

Définition 3.10 (isomorphisme, automorphisme)

1. Isomorphisme = Une application linéaire bijective de E vers F.
2. Deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.
3. Automorphisme = isomorphisme de E dans lui-même.
   Ensemble des automorphismes de E : $\mathrm{Aut}(E)$ ou $\mathrm{GL}(E)$.

Théorème 3.11

Soit f un isomorphisme entre E et F. Alors f^{-1} est une application linéaire, et donc un isomorphisme de F vers E.

Proposition 3.12

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre

Proposition 3.12

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice

Proposition 3.12

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice
3. L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Proposition 3.12

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice
3. L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Proposition 3.13 (caractérisation des iso. par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les p.s.s.e. :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) L'image par f de toute base de E est une base de F ;

(iii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de F.

Proposition 3.12

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice
3. L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Proposition 3.13 (caractérisation des iso. par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les p.s.s.e. :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) L'image par f de toute base de E est une base de F ;

(iii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de F.

Proposition 3.12

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice
3. L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Proposition 3.13 (caractérisation des iso. par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les p.s.s.e. :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) L'image par f de toute base de E est une base de F ;

(iii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de F.

Proposition 3.12

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice
3. L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Proposition 3.13 (caractérisation des iso. par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les p.s.s.e. :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) L'image par f de toute base de E est une base de F ;

(iii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de F.

En particulier, deux espaces isomorphes ont même dimension

III-4 Projecteurs et symétries

Définition 3.14 (projecteurs, symétries)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur de E ssi $p \circ p = p$.

III-4 Projecteurs et symétries

Définition 3.14 (projecteurs, symétries)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur de E ssi $p \circ p = p$.
2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une symétrie ssi $s \circ s = \mathrm{id}$.

III-4 Projecteurs et symétries

Définition 3.14 (projecteurs, symétries)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur de E ssi $p \circ p = p$.
2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une symétrie ssi $s \circ s = \mathrm{id}$.

Lemme 3.15 (caractérisation de l'image d'un projecteur)

Soit p un projecteur de E. Alors : $x \in \operatorname{Im} p \iff p(x) = x$.

III-4 Projecteurs et symétries

Définition 3.14 (projecteurs, symétries)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur de E ssi $p \circ p = p$.
2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une symétrie ssi $s \circ s = \mathrm{id}$.

Lemme 3.15 (caractérisation de l'image d'un projecteur)

Soit p un projecteur de E. Alors : $x \in \operatorname{Im} p \iff p(x) = x$.
Autrement dit, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$.

Théorème 3.16 (Description géométrique des projecteurs)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ p(u+v) = u.$$

Théorème 3.16 (Description géométrique des projecteurs)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ p(u+v) = u.$$

On a alors : $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

Théorème 3.16 (Description géométrique des projecteurs)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ p(u+v) = u.$$

On a alors : $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker} p$.
Ainsi, p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$

Théorème 3.16 (Description géométrique des projecteurs)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ p(u+v) = u.$$

On a alors : $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker} p$.
Ainsi, p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$

2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ s(u+v) = u - v.$$

Théorème 3.16 (Description géométrique des projecteurs)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ p(u+v) = u.$$

On a alors : $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker} p$.
Ainsi, p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$

2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ s(u+v) = u - v.$$

On a alors : $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$

Théorème 3.16 (Description géométrique des projecteurs)

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ p(u+v) = u.$$

   On a alors : $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker} p$.
   Ainsi, p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$

2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement s'il existe deux sev F et G de E tels que $F \oplus G = E$, et :

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ s(u+v) = u - v.$$

   On a alors : $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$
   Ainsi s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV-1 Rang d'une application linéaire

Remarque 4.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV-1 Rang d'une application linéaire

Remarque 4.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie.

Définition 4.2 (rang d'une application linéaire)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E étant de dimension finie. Le rang de f est :

$$\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f.$$

Lemme 4.3 (caractérisation de l'injectivité par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les psse :

(i) f est injective ;

(ii) f envoie toute famille libre sur une famille libre ;

(iii) f envoie au moins une base de E sur une famille libre de F.

Lemme 4.3 (caractérisation de l'injectivité par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les psse :

(i) f est injective ;

(ii) f envoie toute famille libre sur une famille libre ;

(iii) f envoie au moins une base de E sur une famille libre de F.

Lemme 4.3 (caractérisation de l'injectivité par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les psse :

(i) f est injective ;

(ii) f envoie toute famille libre sur une famille libre ;

(iii) f envoie au moins une base de E sur une famille libre de F.

Lemme 4.3 (caractérisation de l'injectivité par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les psse :

(i) f est injective ;

(ii) f envoie toute famille libre sur une famille libre ;

(iii) f envoie au moins une base de E sur une famille libre de F.

Proposition 4.4 (caract. de l'injectivité et surjectivité par rg)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E de dimension finie.

1. $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$,

Lemme 4.3 (caractérisation de l'injectivité par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les psse :

(i) f est injective ;

(ii) f envoie toute famille libre sur une famille libre ;

(iii) f envoie au moins une base de E sur une famille libre de F.

Proposition 4.4 (caract. de l'injectivité et surjectivité par rg)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E de dimension finie.

1. $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si f est injective.

Lemme 4.3 (caractérisation de l'injectivité par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les psse :

(i) f est injective ;

(ii) f envoie toute famille libre sur une famille libre ;

(iii) f envoie au moins une base de E sur une famille libre de F.

Proposition 4.4 (caract. de l'injectivité et surjectivité par rg)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E de dimension finie.

1. $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si f est injective.
2. Si F est de dimension finie, $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$,

Lemme 4.3 (caractérisation de l'injectivité par les bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les psse :

(i) f est injective ;

(ii) f envoie toute famille libre sur une famille libre ;

(iii) f envoie au moins une base de E sur une famille libre de F.

Proposition 4.4 (caract. de l'injectivité et surjectivité par rg)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E de dimension finie.

1. $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si f est injective.
2. Si F est de dimension finie, $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim F$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

Théorème 4.5 (Caract. des iso. en dim finie)

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) $\mathrm{rg}(f) = n$;

(iii) f est injective ;

(iv) f est surjective.

Théorème 4.5 (Caract. des iso. en dim finie)

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) $\mathrm{rg}(f) = n$;

(iii) f est injective ;

(iv) f est surjective.

Théorème 4.5 (Caract. des iso. en dim finie)

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) $\mathrm{rg}(f) = n$;

(iii) f est injective ;

(iv) f est surjective.

Théorème 4.5 (Caract. des iso. en dim finie)

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) $\mathrm{rg}(f) = n$;

(iii) f est injective ;

(iv) f est surjective.

Théorème 4.5 (Caract. des iso. en dim finie)

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme ;

(ii) $\mathrm{rg}(f) = n$;

(iii) f est injective ;

(iv) f est surjective.

En particulier, si E est de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$:

automorphisme $\Longleftrightarrow$ f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective

Théorème 4.6 (Théorème ou formule du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E.$$

IV-2 Formes linéaires

Définition 4.7 (forme linéaire)

Forme linéaire $=$ AL de E dans $\mathbb{K}$

IV-2 Formes linéaires

Définition 4.7 (forme linéaire)

Forme linéaire $=$ AL de E dans $\mathbb{K}$

Proposition 4.8

Soit E de dimension finie. Soit f une forme linéaire non nulle.
Alors $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan.

IV-2 Formes linéaires

Définition 4.7 (forme linéaire)

Forme linéaire $=$ AL de E dans $\mathbb{K}$

Proposition 4.8

Soit E de dimension finie. Soit f une forme linéaire non nulle. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan.

Proposition 4.9

Réciproquement, tout hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

IV-2 Formes linéaires

Définition 4.7 (forme linéaire)

Forme linéaire = AL de E dans $\mathbb{K}$

Proposition 4.8

Soit E de dimension finie. Soit f une forme linéaire non nulle. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan.

Proposition 4.9

Réciproquement, tout hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 4.10

Plus généralement, soit E de dimension finie n, et F sev de E de dimension k. Alors il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^{n-k})$ telle que $F = \operatorname{Ker} f$.

V. Écriture d'une AL dans une base

V-1 Définitions et notations

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies.

Définition 5.1 (coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ une base de F. Soit $X \in F$, et $X = x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n$ l'unique décomposition de X dans la base $\mathcal{C}$. La matrice colonne de X dans la base $\mathcal{C}$ est définie par :

$$[X]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{(notation personnelle).}$$

V. Écriture d'une AL dans une base

V-1 Définitions et notations

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies.

Définition 5.1 (coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ une base de F. Soit $X \in F$, et $X = x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n$ l'unique décomposition de X dans la base $\mathcal{C}$. La matrice colonne de X dans la base $\mathcal{C}$ est définie par :

$$[X]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{(notation personnelle).}$$

Définition 5.2 (matrice d'une famille dans une base)

Sous les mêmes hypothèses, la matrice d'une famille $(X_1, \ldots, X_m)$ de vecteurs de F dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$[X_1, \ldots, X_m]_{\mathcal{C}} = \left([X_1]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [X_m]_{\mathcal{C}} \right).$$

Définition 5.3 (matrice d'une AL relativement à des bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ une base de de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [f(b_1), \ldots, f(b_m)]_{\mathcal{C}} = \left([f(b_1)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [f(b_m)]_{\mathcal{C}} \right)$.

Définition 5.3 (matrice d'une AL relativement à des bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ une base de de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [f(b_1), \ldots, f(b_m)]_{\mathcal{C}} = (\ [f(b_1)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [f(b_m)]_{\mathcal{C}}\ ).$

i-ième colonne $=$ coordonnées de $f(b_i)$ dans $\mathcal{C}$

Définition 5.3 (matrice d'une AL relativement à des bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ une base de de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [f(b_1), \ldots, f(b_m)]_{\mathcal{C}} = (\ [f(b_1)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [f(b_m)]_{\mathcal{C}}\ ).$

i-ième colonne $=$ coordonnées de $f(b_i)$ dans $\mathcal{C}$

Notation plus fréquente : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

Définition 5.3 (matrice d'une AL relativement à des bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ une base de de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :
$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [f(b_1), \dots, f(b_m)]_{\mathcal{C}} = (\ [f(b_1)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [f(b_m)]_{\mathcal{C}}\ ).$
i-ième colonne = coordonnées de $f(b_i)$ dans $\mathcal{C}$
Notation plus fréquente : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

Remarque 5.4

- Notation $[f]_{b.c.}$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ sont munis des bases canoniques.

Définition 5.3 (matrice d'une AL relativement à des bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ une base de de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :
$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [f(b_1), \ldots, f(b_m)]_{\mathcal{C}} = \left(\; [f(b_1)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [f(b_m)]_{\mathcal{C}} \; \right).$
i-ième colonne $=$ coordonnées de $f(b_i)$ dans $\mathcal{C}$
Notation plus fréquente : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

Remarque 5.4

- Notation $[f]_{b.c.}$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ sont munis des bases canoniques.
  On dit qu'il s'agit de la matrice canoniquement associée à f.

Définition 5.3 (matrice d'une AL relativement à des bases)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ une base de de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :
$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [f(b_1), \ldots, f(b_m)]_{\mathcal{C}} = (\ [f(b_1)]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [f(b_m)]_{\mathcal{C}}\ ).$
i-ième colonne $=$ coordonnées de $f(b_i)$ dans $\mathcal{C}$
Notation plus fréquente : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$

Remarque 5.4

- Notation $[f]_{b.c.}$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ sont munis des bases canoniques.
  On dit qu'il s'agit de la matrice canoniquement associée à f.
- Inversement, si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, il existe une unique AL $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ dont A est la matrice canon. associée.
  On dit que f est l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Proposition 5.5 (Calcul matriciel de $f(X)$)

Sous les hypothèses de la définition :

$$\forall X \in E, \quad [f(X)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot [X]_{\mathcal{B}}.$$

Proposition 5.5 (Calcul matriciel de $f(X)$)

Sous les hypothèses de la définition :

$$\forall X \in E, \quad [f(X)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot [X]_{\mathcal{B}}.$$

Proposition 5.6 (Matrice d'une composition, formule magique)

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$[g \circ f]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

V-2 Changements de base

Définition 5.7 (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ est la matrice :

$$[\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2] = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}.$$

V-2 Changements de base

Définition 5.7 (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ est la matrice :

$$[\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2] = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}.$$

i-ème colonne de $\mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ = coordonnées du i-ème vecteur de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

V-2 Changements de base

Définition 5.7 (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ est la matrice :

$$[\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2] = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}.$$

i-ème colonne de $\mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ = coordonnées du i-ème vecteur de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Proposition 5.8

Toute matrice de passage $[\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2]$ est inversible. Son inverse est la matrice de passage $[\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1]$

Proposition 5.9 (changement de base sur un vecteur)

$[X]_{\mathcal{B}_1} = [\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2] \cdot [X]_{\mathcal{B}_2}.$

Proposition 5.9 (changement de base sur un vecteur)

$[X]_{\mathcal{B}_1} = [\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2] \cdot [X]_{\mathcal{B}_2}$.

Théorème 5.10 (Formule de changement de base)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, et F un espace vectoriel de dimension finie, muni de deux bases $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$[f]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2} = [\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1] \cdot [f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1} \cdot [\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2]$$

V-3 Cas des endomorphismes

Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = [f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

V-3 Cas des endomorphismes

Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = [f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Théorème 5.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E étant un espace vectoriel de dimension finie, muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit $P = [\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2]$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)P.$$

V-3 Cas des endomorphismes

Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = [f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Théorème 5.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E étant un espace vectoriel de dimension finie, muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit $P = [\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2]$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)P.$$

Définition 5.12

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

V-3 Cas des endomorphismes

Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = [f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Théorème 5.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E étant un espace vectoriel de dimension finie, muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit $P = [\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2]$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)P.$$

Définition 5.12

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Ainsi, les matrices d'un endormorphisme dans différentes bases de E sont semblables.

V-4 Sous-espaces stables

Définition 5.13 (sous-espace stable)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un sev de E. On dit que F est un sous-espace stable de E si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si pour tout x de F, $f(x)$ est dans F.

V-4 Sous-espaces stables

Définition 5.13 (sous-espace stable)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un sev de E. On dit que F est un sous-espace stable de E si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si pour tout x de F, $f(x)$ est dans F.

Droites stables par $f = \mathbb{R}X$, où X est vecteur propre.

V-4 Sous-espaces stables

Définition 5.13 (sous-espace stable)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un sev de E. On dit que F est un sous-espace stable de E si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si pour tout x de F, $f(x)$ est dans F.

Droites stables par $f = \mathbb{R}X$, où X est vecteur propre.
Ainsi, l'étude des sous-espaces stables d'un endomorphisme est indissociable de l'étude des éléments propres de f.

V-4 Sous-espaces stables

Définition 5.13 (sous-espace stable)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un sev de E. On dit que F est un sous-espace stable de E si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si pour tout x de F, $f(x)$ est dans F.

Droites stables par $f = \mathbb{R}X$, où X est vecteur propre.
Ainsi, l'étude des sous-espaces stables d'un endomorphisme est indissociable de l'étude des éléments propres de f.

Proposition 5.14

Si F est un sous-espace stable par f, alors f se restreint en un endomorphisme de F.

Proposition 5.15 (Caractérisation matricielle de la stabilité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n, et soit F un sev de E. Alors les psse :

(i) F est stable par f ;

(ii) il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E, obtenue par complétion d'une base $(b_1, \dots, b_k)$ de F, telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme suivante (écrite par blocs) :
$$M = \begin{pmatrix} N & P \\ 0_{n-k,k} & Q \end{pmatrix}$$

(iii) la propriété (ii) est vraie pour toute base de E obtenue par complétion d'une base quelconque de F.

Proposition 5.15 (Caractérisation matricielle de la stabilité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n, et soit F un sev de E. Alors les psse :

(i) F est stable par f ;

(ii) il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E, obtenue par complétion d'une base $(b_1, \ldots, b_k)$ de F, telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme suivante (écrite par blocs) :
$$M = \begin{pmatrix} N & P \\ 0_{n-k,k} & Q \end{pmatrix}$$

(iii) la propriété (ii) est vraie pour toute base de E obtenue par complétion d'une base quelconque de F.

Proposition 5.15 (Caractérisation matricielle de la stabilité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n, et soit F un sev de E. Alors les psse :

(i) F est stable par f ;

(ii) il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E, obtenue par complétion d'une base $(b_1, \ldots, b_k)$ de F, telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme suivante (écrite par blocs) :
$$M = \begin{pmatrix} N & P \\ 0_{n-k,k} & Q \end{pmatrix}$$

(iii) la propriété (ii) est vraie pour toute base de E obtenue par complétion d'une base quelconque de F.

Proposition 5.15 (Caractérisation matricielle de la stabilité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n, et soit F un sev de E. Alors les psse :

(i) F est stable par f ;

(ii) il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E, obtenue par complétion d'une base $(b_1, \ldots, b_k)$ de F, telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme suivante (écrite par blocs) :

$$M = \begin{pmatrix} N & P \\ 0_{n-k,k} & Q \end{pmatrix}$$

(iii) la propriété (ii) est vraie pour toute base de E obtenue par complétion d'une base quelconque de F.

De plus, si ces conditions sont réunies, en notant f_F la restriction de f à F, on a :

$N = \mathrm{Mat}_{(b_1,\ldots,b_k)}(f_F)$.

Proposition 5.16 (Caractérisation matricielle de la décomposition en somme de sous-espaces stables)

Mêmes hypothèses + $E = \bigoplus_{i=1}^{\ell} F_i$. Les psse

(i) $F_1, \ldots, F_\ell$ sont stables par f ;

(ii) Il existe des bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_\ell$ de $F_1, \ldots, F_\ell$ telles que, si $\mathcal{B}$ désigne la base de E obtenue par juxtaposition de ces bases, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}$, où chaque bloc carré N_i a une taille égale à $\dim(F_i)$

(iii) La description de (ii) est vraie dans toute base de E obtenue par juxtaposition de bases des F_i.

Proposition 5.16 (Caractérisation matricielle de la décomposition en somme de sous-espaces stables)

Mêmes hypothèses + $E = \bigoplus_{i=1}^{\ell} F_i$. Les psse

(i) $F_1, \ldots, F_\ell$ sont stables par f ;

(ii) Il existe des bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_\ell$ de $F_1, \ldots, F_\ell$ telles que, si $\mathcal{B}$ désigne la base de E obtenue par juxtaposition de ces bases, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}$, où chaque bloc carré N_i a une taille égale à $\dim(F_i)$

(iii) La description de (ii) est vraie dans toute base de E obtenue par juxtaposition de bases des F_i.

Proposition 5.16 (Caractérisation matricielle de la décomposition en somme de sous-espaces stables)

Mêmes hypothèses + $E = \bigoplus_{i=1}^{\ell} F_i$. Les psse

(i) $F_1, \ldots, F_\ell$ sont stables par f ;

(ii) Il existe des bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_\ell$ de $F_1, \ldots, F_\ell$ telles que, si $\mathcal{B}$ désigne la base de E obtenue par juxtaposition de ces bases, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}$, où chaque bloc carré N_i a une taille égale à $\dim(F_i)$

(iii) La description de (ii) est vraie dans toute base de E obtenue par juxtaposition de bases des F_i.

Proposition 5.16 (Caractérisation matricielle de la décomposition en somme de sous-espaces stables)

Mêmes hypothèses + $E = \bigoplus_{i=1}^{\ell} F_i$. Les psse

(i) $F_1, \dots, F_\ell$ sont stables par f ;

(ii) Il existe des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\ell$ de $F_1, \dots, F_\ell$ telles que, si $\mathcal{B}$ désigne la base de E obtenue par juxtaposition de ces bases, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}$, où chaque bloc carré N_i a une taille égale à $\dim(F_i)$

(iii) La description de (ii) est vraie dans toute base de E obtenue par juxtaposition de bases des F_i.

Dans ce cas, pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\quad N_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f_{F_i})$.

Rang d'une matrice

Définition 6.1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $M_1, \ldots, M_m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ses colonnes. Alors le rang de la matrice M est le rang de la famille $(M_1, \ldots, M_m)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Il est noté $\operatorname{rg} M$

Rang d'une matrice

Définition 6.1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $M_1, \ldots, M_m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ses colonnes. Alors le rang de la matrice M est le rang de la famille $(M_1, \ldots, M_m)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Il est noté $\operatorname{rg} M$

Proposition 6.2

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg} M \leqslant \min(n, m)$.

Rang d'une matrice

Définition 6.1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $M_1, \ldots, M_m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ses colonnes. Alors le rang de la matrice M est le rang de la famille $(M_1, \ldots, M_m)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Il est noté $\operatorname{rg} M$

Proposition 6.2

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg} M \leqslant \min(n, m)$.

Proposition 6.3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de M. Les psse :

(i) M est inversible

(ii) $\operatorname{rg} M = n$

(iii) $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Rang d'une matrice

Définition 6.1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $M_1, \ldots, M_m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ses colonnes. Alors le rang de la matrice M est le rang de la famille $(M_1, \ldots, M_m)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Il est noté $\operatorname{rg} M$

Proposition 6.2

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg} M \leqslant \min(n, m)$.

Proposition 6.3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de M. Les psse :

(i) M est inversible

(ii) $\operatorname{rg} M = n$

(iii) $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Rang d'une matrice

Définition 6.1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $M_1, \ldots, M_m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ses colonnes. Alors le rang de la matrice M est le rang de la famille $(M_1, \ldots, M_m)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Il est noté $\operatorname{rg} M$

Proposition 6.2

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg} M \leqslant \min(n, m)$.

Proposition 6.3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de M. Les psse :

(i) M est inversible

(ii) $\operatorname{rg} M = n$

(iii) $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Théorème 6.4

Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F. Alors :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

Théorème 6.4

Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F. Alors :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

En particulier toutes les matrices représentant la même application linéaire dans des choix de bases différents ont le même rang.

Théorème 6.4

Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F. Alors :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

En particulier toutes les matrices représentant la même application linéaire dans des choix de bases différents ont le même rang.

Corollaire 6.5

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ des matrices inversibles. Alors :

$$\operatorname{rg}(PM) = \operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(MQ).$$