
Alain Troesch
Cours de mathématiques en ECS2
Lycée La Bruyère (Versailles)
Année scolaire 2012/2013

Algèbre – Chapitre 5

Espaces euclidiens

Définition 0.1 (Espace euclidien)

Espace euclidien = $\mathbb{R}$ -ev E de **dim finie**, muni d'un **produit scalaire**.

Définition 0.1 (Espace euclidien)

Espace euclidien = $\mathbb{R}$ -ev E de dim finie, muni d'un produit scalaire.

Toutes les propriétés de **normes** et d'**orthogonalités** étudiées sur un espace euclidien le sont donc relativement à **ce produit scalaire**.

Définition 0.1 (Espace euclidien)

Espace euclidien = $\mathbb{R}$ -ev E de dim finie, muni d'un produit scalaire.

Toutes les propriétés de normes et d'orthogonalités étudiées sur un espace euclidien le sont donc relativement à ce produit scalaire.

Dans la suite, E désigne un espace euclidien

- └ Familles orthogonales dans un espace euclidien
- └ Bases orthonormales

Familles orthogonales dans un espace euclidien

Bases orthonormales

Familles orthogonales dans un espace euclidien

Bases orthonormales

Théorème 1.1 (Existence d'une b.o.n.)

Tout espace euclidien E admet **au moins une base orthonormale**.

Familles orthogonales dans un espace euclidien

Bases orthonormales

Théorème 1.1 (Existence d'une b.o.n.)

Tout espace euclidien E admet au moins une base orthonormale.

Théorème 1.2 (Complétion de familles libres)

1. Toute famille libre orthogonale de E peut être complétée en une base orthogonale.

Familles orthogonales dans un espace euclidien

Bases orthonormales

Théorème 1.1 (Existence d'une b.o.n.)

Tout espace euclidien E admet au moins une base orthonormale.

Théorème 1.2 (Complétion de familles libres)

1. Toute famille libre orthogonale de E peut être complétée en une base orthogonale.
2. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

Familles orthogonales dans un espace euclidien

Bases orthonormales

Théorème 1.1 (Existence d'une b.o.n.)

Tout espace euclidien E admet au moins une base orthonormale.

Théorème 1.2 (Complétion de familles libres)

1. Toute famille libre orthogonale de E peut être complétée en une base orthogonale.
2. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

Corollaire 1.3 (Supplémentaire orthogonal)

- ▶ Tout sous-espace F de E admet un **unique supplémentaire G** tel que $F \perp G$.

Familles orthogonales dans un espace euclidien

Bases orthonormales

Théorème 1.1 (Existence d'une b.o.n.)

Tout espace euclidien E admet au moins une base orthonormale.

Théorème 1.2 (Complétion de familles libres)

1. Toute famille libre orthogonale de E peut être complétée en une base orthogonale.
2. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

Corollaire 1.3 (Supplémentaire orthogonal)

- ▶ Tout sous-espace F de E admet un unique supplémentaire G tel que $F \perp G$. De plus, $G = F^\perp$.

Familles orthogonales dans un espace euclidien

Bases orthonormales

Théorème 1.1 (Existence d'une b.o.n.)

Tout espace euclidien E admet au moins une base orthonormale.

Théorème 1.2 (Complétion de familles libres)

1. Toute famille libre orthogonale de E peut être complétée en une base orthogonale.
2. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

Corollaire 1.3 (Supplémentaire orthogonal)

- ▶ Tout sous-espace F de E admet un unique supplémentaire G tel que $F \perp G$. De plus, $G = F^\perp$.
- ▶ On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F .

Proposition 1.4 (b.o.n. d'une somme directe orthogonale)

- ▶ Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \perp G$,
- ▶ soit $(b_1, \dots, b_p)$ une b.o.n. de F ,
- ▶ soit $(c_1, \dots, c_q)$ une b.o.n. de G .

Alors $(b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q)$ est une b.o.n. de $F \oplus G$.

Proposition 1.4 (b.o.n. d'une somme directe orthogonale)

- ▶ Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \perp G$,
- ▶ soit $(b_1, \dots, b_p)$ une b.o.n. de F ,
- ▶ soit $(c_1, \dots, c_q)$ une b.o.n. de G .

Alors $(b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q)$ est une b.o.n. de $F \oplus G$.

Corollaire 1.5

$F_1, \dots, F_p$ des sev de E , deux à deux orthogonaux.

Juxtaposer des b.o.n. des $F_i \longrightarrow$ b.o.n. de $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

Proposition 1.4 (b.o.n. d'une somme directe orthogonale)

- ▶ Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \perp G$,
- ▶ soit $(b_1, \dots, b_p)$ une b.o.n. de F ,
- ▶ soit $(c_1, \dots, c_q)$ une b.o.n. de G .

Alors $(b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q)$ est une b.o.n. de $F \oplus G$.

Corollaire 1.5

$F_1, \dots, F_p$ des sev de E , deux à deux orthogonaux.

Juxtaposer des b.o.n. des $F_i \longrightarrow$ b.o.n. de $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

Corollaire 1.6

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E .

Soit $(b_1, \dots, b_p)$ b.o.n. de F et $(c_1, \dots, c_q)$ une b.o.n. de $F^\perp$.

Alors $(b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q)$ est une b.o.n. de E .

Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 1.7 (Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n.)

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ b.o.n. de E , $x \in E$:

$$(i) \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle b_i, \text{ c'est-à-dire } [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle x, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 1.7 (Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n.)

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ b.o.n. de E , $x \in E$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad x &= \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle b_i, \text{ c'est-à-dire } [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle x, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n \rangle \end{pmatrix}. \\ \text{(ii)} \quad \|x\|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle^2 \end{aligned}$$

Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 1.7 (Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n.)

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ b.o.n. de E , $x \in E$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad x &= \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle b_i, \text{ c'est-à-dire } [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle x, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n \rangle \end{pmatrix}. \\ \text{(ii)} \quad \|x\|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle^2 \end{aligned}$$

Théorème 1.8 (Matrice d'un endomorphisme dans une b.o.n.)

Soit E un espace eucl., $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ b.o.n. de E , $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (\langle b_i, u(b_j) \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \langle b_1, u(b_1) \rangle & \cdots & \langle b_1, u(b_n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle b_n, u(b_1) \rangle & \cdots & \langle b_n, u(b_n) \rangle \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.9 (Matrice du produit scalaire dans une b.o.n.)

Soit E un espace euclidien, et $\mathcal{B}$ une base E .

1. Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n., la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ est I_n .

Théorème 1.9 (Matrice du produit scalaire dans une b.o.n.)

Soit E un espace euclidien, et $\mathcal{B}$ une base E .

1. Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n., la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ est I_n .

Ainsi, pour tout (x, y) dans E^2 , on a :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY,$$

où $X = [x]_{\mathcal{B}}$ et $Y = [y]_{\mathcal{B}}$.

Théorème 1.9 (Matrice du produit scalaire dans une b.o.n.)

Soit E un espace euclidien, et $\mathcal{B}$ une base E .

1. Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n., la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ est I_n .

Ainsi, pour tout (x, y) dans E^2 , on a :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY,$$

où $X = [x]_{\mathcal{B}}$ et $Y = [y]_{\mathcal{B}}$.

2. Réciproquement, si la matrice du ps dans $\mathcal{B}$ est I_n , alors $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E .

Matrices orthogonales

Théorème 1.10 (Propriété des mat de passage entre b.o.n.)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux b.o.n. de E . Soit $P = [\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}]$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Alors ${}^t P P = I_n = P {}^t P$.

Matrices orthogonales

Théorème 1.10 (Propriété des mat de passage entre b.o.n.)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux b.o.n. de E . Soit $P = [\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}]$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Alors ${}^t P P = I_n = P {}^t P$.

Définition 1.11 (Matrices orthogonales)

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est une matrice orthogonale si et seulement si ${}^t P P = I_n$.

Matrices orthogonales

Théorème 1.10 (Propriété des mat de passage entre b.o.n.)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux b.o.n. de E . Soit $P = [\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}]$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Alors ${}^t P P = I_n = P {}^t P$.

Définition 1.11 (Matrices orthogonales)

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est une matrice orthogonale si et seulement si ${}^t P P = I_n$.

Proposition 1.12 (Inverse des matrices orthogonales)

Soit P une matrice orthogonale. Alors P est inversible, et $P^{-1} = {}^t P$.

Théorème 1.13 (Caractérisation des matrices orthogonales)

Une matrice P est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique.

Théorème 1.13 (Caractérisation des matrices orthogonales)

Une matrice P est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique.

Théorème 1.14

Soit E un espace euclidien.

1. Toute matrice de passage d'une b.o.n. de E à une autre b.o.n. de E est une matrice orthogonale.

Théorème 1.13 (Caractérisation des matrices orthogonales)

Une matrice P est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique.

Théorème 1.14

Soit E un espace euclidien.

1. Toute matrice de passage d'une b.o.n. de E à une autre b.o.n. de E est une matrice orthogonale.
2. Réciproquement, soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Si P est orthogonale et $\mathcal{B}$ est une b.o.n., alors $\mathcal{C}$ est aussi une b.o.n.

Projecteurs orthogonaux

Rappels sur les projections orthogonales

Définition 2.1 (Projeté orthogonale, rappel)

Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E .
Soit $x \in E$. On dit qu'un vecteur y de E est **un projeté orthogonal de x sur F** si et seulement si :

- (i) $y \in F$
- (ii) $x - y \in F^\perp$.

Proposition 2.2 (Existence, unicité et expression du projeté)

Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ Alors tout vecteur x de E admet **un et un seul projeté orthogonal** $p_F(x)$ sur F .

Proposition 2.2 (Existence, unicité et expression du projeté)

Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ Alors tout vecteur x de E admet un et un seul projeté orthogonal $p_F(x)$ sur F .
- ▶ Étant donné une **b.o.n.** $(b_1, \dots, b_p)$ de F ,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, b_i \rangle b_i.$$

Proposition 2.2 (Existence, unicité et expression du projeté)

Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ Alors tout vecteur x de E admet un et un seul projeté orthogonal $p_F(x)$ sur F .
- ▶ Étant donné une b.o.n. $(b_1, \dots, b_p)$ de F ,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, b_i \rangle b_i.$$

Définition 2.3 (Projection orthogonale)

Le projeté orthogonal d'un vecteur sur F définit une application

$p_F : E \rightarrow E$, appelée **projection orthogonale sur F**

Proposition 2.2 (Existence, unicité et expression du projeté)

Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ Alors tout vecteur x de E admet un et un seul projeté orthogonal $p_F(x)$ sur F .
- ▶ Étant donné une b.o.n. $(b_1, \dots, b_p)$ de F ,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, b_i \rangle b_i.$$

Définition 2.3 (Projection orthogonale)

Le projeté orthogonal d'un vecteur sur F définit une application $p_F : E \rightarrow E$, appelée **projection orthogonale sur F**

Proposition 2.4

Évidemment, p_F est un projecteur.

Définition 2.5 (Projecteur associé)

Soit p un projecteur quelconque de E . Alors $\text{id}_E - p$ est un projecteur de E , appelé projecteur associé de p .

Définition 2.5 (Projecteur associé)

Soit p un projecteur quelconque de E . Alors $\text{id}_E - p$ est un projecteur de E , appelé **projecteur associé de p** .

Proposition 2.6

Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E . Alors **le projecteur associé de la projection orthogonale p_F est $p_{F^\perp}$** .

Exemple 2.7 (Déterminer la matrice d'un projecteur orthogonal)

Soit dans $\mathbb{R}^3$ le plan F d'équation $x + 2y - z = 0$.

Déterminer la matrice de p_F , projecteur orthogonal sur F .

Réponse : $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

- Première méthode : trouver une b.o.n. de F , et utiliser la formule du projeté orthogonal.

Exemple 2.7 (Déterminer la matrice d'un projecteur orthogonal)

Soit dans $\mathbb{R}^3$ le plan F d'équation $x + 2y - z = 0$.

Déterminer la matrice de p_F , projecteur orthogonal sur F .

Réponse : $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

- ▶ **Première méthode** : trouver une b.o.n. de F , et utiliser la formule du projeté orthogonal.
- ▶ **Deuxième méthode** (efficace quand $\dim F^\perp < \dim F$) :
Déterminer une b.o.n. de $F^\perp$.
Exprimer d'abord la matrice de $p_{F^\perp}$.

Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Théorème 2.8

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E , et $x \in E$.

Alors :

$$\forall y \in F, \quad \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|,$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si $y = p_F(x)$.

Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Théorème 2.8

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E , et $x \in E$.

Alors :

$$\forall y \in F, \quad \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|,$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si $y = p_F(x)$.

Définition 2.9

On dit que $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F . On appelle **distance de x à F** le réel suivant :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

Problème des moindres carrés (minimisation de $\|AX - B\|$)

Théorème 2.10 (Problème des moindres carrés)

Soit $n \geq p$ deux entiers strictement positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, de rang p , et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il existe un et un seul vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la norme $\|AX - B\|$. Ce vecteur X est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$.

Problème des moindres carrés (minimisation de $\|AX - B\|$)

Théorème 2.10 (Problème des moindres carrés)

Soit $n \geq p$ deux entiers strictement positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, de rang p , et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il existe un et un seul vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la norme $\|AX - B\|$. Ce vecteur X est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$.

Exemple d'utilisation : droites de régression

Ce théorème est notamment utilisé pour déterminer la droite des moindres carrés de y en x (ou droite de régression de y en x) d'un nuage de points.

Endomorphismes symétriques ($u \in \mathcal{L}(E)$)

Définition 3.1 (endomorphisme symétrique)

On dit que u est un **endomorphisme symétrique** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle .$$

Endomorphismes symétriques ($u \in \mathcal{L}(E)$)

Définition 3.1 (endomorphisme symétrique)

On dit que u est un **endomorphisme symétrique** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Proposition 3.2 (Caractérisation des endo. symétriques)

Les psse :

- (i) u est un **endomorphisme symétrique** ;

Endomorphismes symétriques ($u \in \mathcal{L}(E)$)

Définition 3.1 (endomorphisme symétrique)

On dit que u est un **endomorphisme symétrique** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Proposition 3.2 (Caractérisation des endo. symétriques)

Les psse :

- (i) u est un **endomorphisme symétrique** ;
- (ii) $\forall \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\forall (i, j), \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$

Endomorphismes symétriques ($u \in \mathcal{L}(E)$)

Définition 3.1 (endomorphisme symétrique)

On dit que u est un **endomorphisme symétrique** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Proposition 3.2 (Caractérisation des endo. symétriques)

Les psse :

- (i) u est un **endomorphisme symétrique** ;
- (ii) $\forall \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\forall (i, j), \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$
- (iii) $\exists \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\forall (i, j), \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$

Endomorphismes symétriques ($u \in \mathcal{L}(E)$)

Définition 3.1 (endomorphisme symétrique)

On dit que u est un **endomorphisme symétrique** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Proposition 3.2 (Caractérisation des endo. symétriques)

Les psse :

- (i) u est un **endomorphisme symétrique** ;
- (ii) $\forall \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\forall (i, j)$, $\langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$
- (iii) $\exists \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\forall (i, j)$, $\langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$
- (iv) $\forall \mathcal{B}$ b.o.n. de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une **matrice symétrique**

Endomorphismes symétriques ($u \in \mathcal{L}(E)$)

Définition 3.1 (endomorphisme symétrique)

On dit que u est un **endomorphisme symétrique** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Proposition 3.2 (Caractérisation des endo. symétriques)

Les psse :

- (i) u est un **endomorphisme symétrique** ;
- (ii) $\forall \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\forall (i, j), \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$
- (iii) $\exists \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\forall (i, j), \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$
- (iv) $\forall \mathcal{B}$ b.o.n. de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une **matrice symétrique**
- (v) $\exists \mathcal{B}$ b.o.n. de E tq $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit une **matrice symétrique**.

Méthode pour montrer qu'un endomorphisme est symétrique :

- ▶ montrer la propriété de symétrie sur les vecteurs d'une base quelconque de E ,

Méthode pour montrer qu'un endomorphisme est symétrique :

- ▶ montrer la propriété de symétrie sur les vecteurs d'une base quelconque de E ,
- ▶ ou bien trouver **une base orthonormale** relativement à laquelle **la matrice de u soit symétrique**.

Méthode pour montrer qu'un endomorphisme est symétrique :

- ▶ montrer la propriété de symétrie sur les vecteurs d'une base quelconque de E ,
- ▶ ou bien trouver une base orthonormale relativement à laquelle la matrice de u soit symétrique.

Exemple

Les **projecteurs orthogonaux** et les **symétries orthogonales** sont des endomorphismes symétriques.

Méthode pour montrer qu'un endomorphisme est symétrique :

- ▶ montrer la propriété de symétrie sur les vecteurs d'une base quelconque de E ,
- ▶ ou bien trouver une base orthonormale relativement à laquelle la matrice de u soit symétrique.

Exemple

Les projecteurs orthogonaux et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques.

Corollaire 3.3

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Alors u est un endomorphisme symétrique ssi la matrice canoniquement associée est symétrique.

Théorème 3.4 (Important, admis)

Tout endomorphisme symétrique admet au moins une valeur propre réelle.

Théorème 3.4 (Important, admis)

Tout **endomorphisme symétrique** admet au moins une valeur propre réelle.

Théorème 3.5 (Orthogonalité des sev propres)

Les espaces propres (sur $\mathbb{R}$) d'un **endomorphisme symétrique** sont **2 à 2 orthogonaux**.

Théorème 3.4 (Important, admis)

Tout endomorphisme symétrique admet au moins une valeur propre réelle.

Théorème 3.5 (Orthogonalité des sev propres)

Les espaces propres (sur $\mathbb{R}$) d'un endomorphisme symétrique sont 2 à 2 orthogonaux.

Théorème 3.6 (Théorème spectral)

Les psse :

- (i) u est un endomorphisme symétrique

Théorème 3.4 (Important, admis)

Tout **endomorphisme symétrique** admet au moins une valeur propre réelle.

Théorème 3.5 (Orthogonalité des sev propres)

Les espaces propres (sur $\mathbb{R}$) d'un endomorphisme symétrique sont 2 à 2 orthogonaux.

Théorème 3.6 (Théorème spectral)

Les psse :

- (i) u est un **endomorphisme symétrique**
- (ii) u est **diagonalisable** dans une **b.o.n.** de vecteurs propres.

Corollaire 3.7 (Diagonalisabilité des matrices symétriques)

- ▶ Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable.

Corollaire 3.7 (Diagonalisabilité des matrices symétriques)

- ▶ Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable.
- ▶ Il existe au moins une b.o.n. de diagonalisation.

Corollaire 3.7 (Diagonalisabilité des matrices symétriques)

- ▶ Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable.
- ▶ Il existe au moins une b.o.n. de diagonalisation.
- ▶ Il existe P orthogonale et D diagonale tq $D = {}^tPAP$.

Corollaire 3.7 (Diagonalisabilité des matrices symétriques)

- ▶ Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable.
- ▶ Il existe au moins une b.o.n. de diagonalisation.
- ▶ Il existe P orthogonale et D diagonale tq $D = {}^tPAP$.

Théorème 3.8

Soit A une matrice symétrique réelle, et $(X_1, \dots, X_n)$ une b.o.n. de vecteurs propres de A , associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Alors :

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i {}^tX_i.$$

Exemple 3.9

Trouver une b.o.n.de diagonalisation de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.