Alain Troesch
Cours de mathématiques en ECS2
Lycée La Bruyère (Versailles)
Année scolaire 2012/2013

Algèbre – Chapitre 6

Formes quadratiques

Dans tout ce chapitre, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique.

I. Définition

Définition 1.1 (Forme quadratique)

Une application $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

I. Définition

Définition 1.1 (Forme quadratique)

Une application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est appelée forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

Proposition 1.2 (Quadraticité)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.

Définition 1.3 (Fonction polynomiale)

- Une fonction polynomiale en les variables réelle $x_1, \ldots, x_n$ est une CL de monômes $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, pour $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.

Définition 1.3 (Fonction polynomiale)

- Une fonction polynomiale en les variables réelle $x_1, \ldots, x_n$ est une CL de monômes $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, pour $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.
- L'entier $i_1 + \cdots + i_n$ est appelé degré du monôme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$.

Définition 1.3 (Fonction polynomiale)

- Une fonction polynomiale en les variables réelle $x_1, \dots, x_n$ est une CL de monômes $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, pour $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.
- L'entier $i_1 + \cdots + i_n$ est appelé degré du monôme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$.
- Le degré d'une fonction polynomiale est le degré maximal de ses monômes.

Définition 1.3 (Fonction polynomiale)

- Une fonction polynomiale en les variables réelle $x_1, \dots, x_n$ est une CL de monômes $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, pour $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.
- L'entier $i_1 + \cdots + i_n$ est appelé degré du monôme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$.
- Le degré d'une fonction polynomiale est le degré maximal de ses monômes.

Définition 1.4 (Fonction polynomiale homogène)

Une fonction polynomiale est homogène de degré d si tous ses monômes ont même degré d.

Exemple 1.5

Fonction polynomiale f homogène de degré 2 sur $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \lambda_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \lambda_{i,j} x_i x_j.$$

Exemple 1.5

Fonction polynomiale f homogène de degré 2 sur $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} \lambda_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_{i,j}x_ix_j.$$

Proposition 1.6

Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Les psse :

(i) q est une forme quadratique

Exemple 1.5

Fonction polynomiale f homogène de degré 2 sur $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} \lambda_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \lambda_{i,j}x_ix_j.$$

Proposition 1.6

Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Les psse :

(i) q est une forme quadratique

(ii) $\forall \mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$, q est une fonction pol. homogène de degré 2 en les coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ de X dans la base $\mathcal{B}$

Exemple 1.5

Fonction polynomiale f homogène de degré 2 sur $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \lambda_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \lambda_{i,j} x_i x_j.$$

Proposition 1.6

Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Les psse :

(i) q est une forme quadratique

(ii) $\forall \mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$, q est une fonction pol. homogène de degré 2 en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de X dans la base $\mathcal{B}$

(iii) $\exists \mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ tq q est une fonct. pol. homogène de degré 2 en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de X dans la base $\mathcal{B}$

Exemple 1.7

Soit q définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad q(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

Soient φ_1 et φ_2 les deux formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ canoniquement associées respectivement à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.7

Soit q définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad q(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

Soient φ_1 et φ_2 les deux formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ canoniquement associées respectivement à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Alors : $\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad q(X) = \varphi_1(X, X) = \varphi_2(X, X).$

Exemple 1.7

Soit q définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad q(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

Soient φ_1 et φ_2 les deux formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ canoniquement associées respectivement à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Alors : $\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad q(X) = \varphi_1(X,X) = \varphi_2(X,X)$.

Conclusion :

On n'a pas unicité de la forme bilinéaire φ telle que $Q(x) = \varphi(x,x)$!

II. Forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique

Proposition 2.1 (Forme bilinéaire symétrique associée)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique forme bilinéaire **symétrique** φ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

II. Forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique

Proposition 2.1 (Forme bilinéaire symétrique associée)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique forme bilinéaire **symétrique** φ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

Lemme 2.2

Soit ψ une forme bilinéaire quelconque sur E. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \psi(x+y, x+y) - \psi(x, x) - \psi(y, y) = \psi(x, y) + \psi(y, x).$$

Proposition 2.3 (Passer de q à $\mathrm{Mat}(\psi)$, ...)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors :

- Soit ψ une f.b. quelconque associée à q, $\mathrm{Mat}_{bc}(\psi) = (a_{i,j})$.

  Alors : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\quad q(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$

Proposition 2.3 (Passer de q à $\mathrm{Mat}(\psi)$, ...)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors :

- Soit ψ une f.b. quelconque associée à q, $\mathrm{Mat}_{bc}(\psi) = (a_{i,j})$.

  Alors : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j.$

- En particulier, si ψ est la f.b. symétrique associée à q, alors :

  $\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j.$

Proposition 2.3 (.... et vice versa)

- Si $q(X) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} b_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_{i,j}x_ix_j$, alors ψ est associée à q ssi $\mathrm{Mat}(\varphi) = (a_{i,j})$ vérifie :

$$\begin{cases} a_{i,i} = b_{i,i} \\ a_{i,j} + a_{j,i} = b_{i,j} \text{ si } i < j \end{cases}$$

Proposition 2.3 (.... et vice versa)

- Si $q(X) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} b_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_{i,j} x_i x_j$, alors ψ est associée à q ssi $\mathrm{Mat}(\varphi) = (a_{i,j})$ vérifie :

$$\begin{cases} a_{i,i} = b_{i,i} \\ a_{i,j} + a_{j,i} = b_{i,j} \text{ si } i < j \end{cases}$$

- ψ est l'unique forme bilinéaire symétrique associée à q ssi de plus :

$$\forall i < j, \quad a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{b_{i,j}}{2}.$$

Exemples 2.3

1. Trouver la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad q(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 5xz - y^2 + z^2.$$

Exemples 2.3

1. Trouver la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad q(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 5xz - y^2 + z^2.$$

2. Déterminer la forme quadratique canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Théorème 2.4

Les psse :

(i) q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 2.4

Les psse :

(i) q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

(ii) Il existe une matrice symétrique A telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = {}^tXAX$$

Théorème 2.4

Les psse :

(i) q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

(ii) Il existe une matrice symétrique A telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = {}^tXAX$$

(iii) Il existe un endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \langle u(x), x \rangle = \langle x, u(x) \rangle .$$

Théorème 2.4

Les psse :

(i) q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

(ii) Il existe une matrice symétrique A telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \ {}^tXAX$$

(iii) Il existe un endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \langle u(x), x \rangle = \langle x, u(x) \rangle \, .$$

Dans ce cas, u et A sont uniques, et $A = \mathrm{Mat}_{bc}(u) = \mathrm{Mat}_{bc}(\varphi)$, où φ est l'unique f.b. sym. associée à q.

III. CNS pour les caractères définis et positifs

Proposition 3.1 (Expression de q à l'aide des vp de u)

Soit :

- q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$,

III. CNS pour les caractères définis et positifs

Proposition 3.1 (Expression de q à l'aide des vp de u)

Soit :

- q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$,
- u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ associé à q

III. CNS pour les caractères définis et positifs

Proposition 3.1 (Expression de q à l'aide des vp de u)

Soit :

- q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$,
- u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ associé à q
- $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une b.o.n. de vecteurs propres de u,

III. CNS pour les caractères définis et positifs

Proposition 3.1 (Expression de q à l'aide des vp de u)

Soit :

- q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$,
- u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ associé à q
- $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une b.o.n. de vecteurs propres de u,
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

III. CNS pour les caractères définis et positifs

Proposition 3.1 (Expression de q à l'aide des vp de u)

Soit :

- q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$,
- u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ associé à q
- $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une b.o.n. de vecteurs propres de u,
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k x_k^2.$$

Proposition 3.2 (Caractérisation de la positivité par les vp)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et u, φ comme plus haut :

(i) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, φ est positive : $\forall X, q(X) \geqslant 0$.

Proposition 3.2 (Caractérisation de la positivité par les vp)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et u, φ comme plus haut :

(i) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, φ est positive : $\forall X, q(X) \geqslant 0$.

(ii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, φ est définie positive : $\forall X \neq 0, q(X) > 0$.

Proposition 3.2 (Caractérisation de la positivité par les vp)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et u, φ comme plus haut :

(i) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, φ est positive : $\forall X, q(X) \geqslant 0$.

(ii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, φ est définie positive : $\forall X \neq 0, q(X) > 0$.

(iii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-$, φ est négative : $\forall X, q(X) \leqslant 0$.

Proposition 3.2 (Caractérisation de la positivité par les vp)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et u, φ comme plus haut :

(i) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, φ est positive : $\forall X, q(X) \geqslant 0$.

(ii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, φ est définie positive : $\forall X \neq 0, q(X) > 0$.

(iii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-$, φ est négative : $\forall X, q(X) \leqslant 0$.

(iv) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-^*$, φ est définie négative : $\forall X \neq 0, q(X) < 0$.

Proposition 3.2 (Caractérisation de la positivité par les vp)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et u, φ comme plus haut :

(i) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, φ est positive : $\forall X, q(X) \geqslant 0$.

(ii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, φ est définie positive : $\forall X \neq 0, q(X) > 0$.

(iii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-$, φ est négative : $\forall X, q(X) \leqslant 0$.

(iv) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-^*$, φ est définie négative : $\forall X \neq 0, q(X) < 0$.

(v) Si $0 \in \mathrm{Sp}(u)$, φ n'est pas une forme définie.

Proposition 3.2 (Caractérisation de la positivité par les vp)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et u, φ comme plus haut :

(i) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, φ est positive : $\forall X, q(X) \geqslant 0$.

(ii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, φ est définie positive : $\forall X \neq 0, q(X) > 0$.

(iii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-$, φ est négative : $\forall X, q(X) \leqslant 0$.

(iv) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-^*$, φ est définie négative : $\forall X \neq 0, q(X) < 0$.

(v) Si $0 \in \mathrm{Sp}(u)$, φ n'est pas une forme définie.

(vi) Si $\exists(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(u)$, $\lambda < 0$ et $\mu > 0$, alors φ n'est ni définie, ni positive, ni négative.

Proposition 3.2 (Caractérisation de la positivité par les vp)

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et u, φ comme plus haut :

(i) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, φ est positive : $\forall X, q(X) \geqslant 0$.

(ii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, φ est définie positive : $\forall X \neq 0, q(X) > 0$.

(iii) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-$, φ est négative : $\forall X, q(X) \leqslant 0$.

(iv) Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_-^*$, φ est définie négative : $\forall X \neq 0, q(X) < 0$.

(v) Si $0 \in \mathrm{Sp}(u)$, φ n'est pas une forme définie.

(vi) Si $\exists(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(u)$, $\lambda < 0$ et $\mu > 0$, alors φ n'est ni définie, ni positive, ni négative.

Et en fonction des valeurs propres de $A = \mathrm{Mat}(\varphi)$?

C'est la même chose, puisque $\mathrm{Mat}(\varphi) = \mathrm{Mat}(u)$!

Corollaire 3.3 (Caractérisation des produits scalaires)

(i) Soit q une forme quad. sur $\mathbb{R}^n$, u la f.b. symétrique associée. Alors q est le carré d'une norme euclidienne ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 3.3 (Caractérisation des produits scalaires)

(i) Soit q une forme quad. sur $\mathbb{R}^n$, u la f.b. symétrique associée. Alors q est le carré d'une norme euclidienne ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(ii) Soit φ une f.b. symétrique sur $\mathbb{R}^n$, de matrice A dans la b.c. Alors :

- φ est positive ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

Corollaire 3.3 (Caractérisation des produits scalaires)

(i) Soit q une forme quad. sur $\mathbb{R}^n$, u la f.b. symétrique associée. Alors q est le carré d'une norme euclidienne ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(ii) Soit φ une f.b. symétrique sur $\mathbb{R}^n$, de matrice A dans la b.c. Alors :

- φ est positive ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$
- φ est un produit scalaire ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 3.3 (Caractérisation des produits scalaires)

(i) Soit q une forme quad. sur $\mathbb{R}^n$, u la f.b. symétrique associée. Alors q est le carré d'une norme euclidienne ssi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(ii) Soit φ une f.b. symétrique sur $\mathbb{R}^n$, de matrice A dans la b.c. Alors :

- φ est positive ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$
- φ est un produit scalaire ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 3.4

Les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ canoniquement associées à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles positives ? sont-elles des produits scalaires ?