# Chapitre 2

# Séries numériques : révisions

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*
- *Somme partielle*

# I. Notion de série et de convergence
## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*
- *Somme partielle*
- *Convergence – Somme d'une série convergente*

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*
- *Somme partielle*
- *Convergence – Somme d'une série convergente*
- *Divergence*

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*
- *Somme partielle*
- *Convergence – Somme d'une série convergente*
- *Divergence*
- *Reste d'une série*

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*
- *Somme partielle*
- *Convergence – Somme d'une série convergente*
- *Divergence*
- *Reste d'une série*
- *Nature d'une série*

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*
- *Somme partielle*
- *Convergence – Somme d'une série convergente*
- *Divergence*
- *Reste d'une série*
- *Nature d'une série*

**Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\neq$ Série de terme général $u_n$.**

# I. Notion de série et de convergence

## I-1 Définitions

### Définition 1.1

- *Série – terme général d'une série*
- *Somme partielle*
- *Convergence – Somme d'une série convergente*
- *Divergence*
- *Reste d'une série*
- *Nature d'une série*

**Suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq$ **Série de terme général** $u_n$**.**

### Remarque 1.2

*Notions valables pour* $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$.

# Exemple 1.3

## Séries géométriques

*Soit* $a \in \mathbb{C}$. *La série* $\sum a^n$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$.

## Exemple 1.3

### **Séries géométriques**

*Soit* $a \in \mathbb{C}$. *La série* $\sum a^n$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$.

*Dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

## Exemple 1.3

**Séries géométriques**

*Soit* $a \in \mathbb{C}$. *La série* $\sum a^n$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$.

*Dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

## Exemple 1.4

**Série de Riemann de paramètre 1.**

*La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

## Exemple 1.3

**Séries géométriques**

*Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.*

*Dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

## Exemple 1.4

**Série de Riemann de paramètre 1.**

*La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

## Remarque 1.5

- $\sum u_n$ *CV* $\iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CV.*

## Exemple 1.3

**Séries géométriques**

*Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.*

*Dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

## Exemple 1.4

**Série de Riemann de paramètre 1.**

*La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

## Remarque 1.5

- $\sum u_n$ *CV* $\Longleftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CV*.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CV* $\Longleftrightarrow \sum(u_{n+1} - u_n)$ *CV*

## Exemple 1.3

**Séries géométriques**

*Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.*

*Dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

## Exemple 1.4

**Série de Riemann de paramètre 1.**

*La série* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

## Remarque 1.5

- $\sum u_n$ *CV* $\Longleftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CV*.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CV* $\Longleftrightarrow \sum(u_{n+1} - u_n)$ *CV*
  *Utile pour exploiter les techniques spécifiques et performantes des séries pour l'étude de la convergence de certaines suites.*

# I-2 Propriétés liées à la convergence

## I-2 Propriétés liées à la convergence

### Proposition 1.6

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un* ***nombre fini*** *de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

## I-2 Propriétés liées à la convergence

### Proposition 1.6

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un* **nombre fini** *de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

### Théorème 1.7

- *$\sum u_n$ converge $\implies$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0*

## I-2 Propriétés liées à la convergence

### Proposition 1.6

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un* **nombre fini** *de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

### Théorème 1.7

- $\sum u_n$ *converge* $\implies$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers* 0 $\implies$ $\sum u_n$ *diverge*

## I-2 Propriétés liées à la convergence

### Proposition 1.6

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un* **nombre fini** *de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

### Théorème 1.7

- $\sum u_n$ *converge* $\implies$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers* 0 $\implies$ $\sum u_n$ *diverge*

### Définition 1.8

*Divergence grossière* = "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers 0*"

## I-2 Propriétés liées à la convergence

### Proposition 1.6

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un* **nombre fini** *de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

### Théorème 1.7

- $\sum u_n$ *converge* $\implies$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $0$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers* $0$ $\implies$ $\sum u_n$ *diverge*

### Définition 1.8

*Divergence grossière = "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0"*

### Remarque 1.9

**La réciproque est fausse.**

## I-2 Propriétés liées à la convergence

### Proposition 1.6

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un* **nombre fini** *de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

### Théorème 1.7

- $\sum u_n$ *converge* $\implies$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $0$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers* $0$ $\implies$ $\sum u_n$ *diverge*

### Définition 1.8

*Divergence grossière = " $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0"*

### Remarque 1.9

**La réciproque est fausse.** *Exemple :* $\sum \frac{1}{n}$

## Combinaisons linéaires de séries

## Combinaisons linéaires de séries

### Proposition 1.10

1. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge* ,

## Combinaisons linéaires de séries

### Proposition 1.10

1. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge , et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

## Combinaisons linéaires de séries

## Proposition 1.10

1. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge , et :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge, alors* $\sum(u_n + v_n)$ *diverge.*

## Combinaisons linéaires de séries

## Proposition 1.10

1. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge , et :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge, alors* $\sum(u_n + v_n)$ *diverge.*
3. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent, on ne peut rien conclure sur* $\sum u_n + v_n$*.*

# I-3 Types de convergence

## I-3 Types de convergence

- Convergence absolue

## I-3 Types de convergence

- Convergence absolue

### Théorème 1.11

*CV absolue* $\Longrightarrow$ *CV*

## I-3 Types de convergence

- Convergence absolue

### Théorème 1.11

*CV absolue* $\Longrightarrow$ *CV*

- Semi-convergence = CV mais pas absolue

## I-3 Types de convergence

- Convergence absolue

### Théorème 1.11

*CV absolue* $\Longrightarrow$ *CV*

- Semi-convergence = CV mais pas absolue
- Divergence grossière = " $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 "

## I-3 Types de convergence

- Convergence absolue

### Théorème 1.11

*CV absolue* $\Longrightarrow$ *CV*

- Semi-convergence = CV mais pas absolue
- Divergence grossière = " $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 "
- Il existe des cas de divergence non grossière.

# Démarche générale à suivre pour l'étude des séries

## Démarche générale à suivre pour l'étude des séries

1. Calcul de $\lim u_n \longrightarrow$ DV grossière ?

Démarche générale à suivre pour l'étude des séries

1. Calcul de $\lim u_n \longrightarrow$ DV grossière ?
2. CV absolue par les techniques présentées plus loin.

Démarche générale à suivre pour l'étude des séries

1. Calcul de $\lim u_n \longrightarrow$ DV grossière ?
2. CV absolue par les techniques présentées plus loin.
3. Si non, série alternée ? Possibilité de s'y ramener par des DL ?

Démarche générale à suivre pour l'étude des séries

1. Calcul de $\lim u_n \longrightarrow$ DV grossière ?
2. CV absolue par les techniques présentées plus loin.
3. Si non, série alternée ? Possibilité de s'y ramener par des DL ?
4. Sinon, au cas par cas.

# II. Séries à termes positifs

## II. Séries à termes positifs

Tout ce qui suit est aussi valable pour :

## II. Séries à termes positifs

Tout ce qui suit est aussi valable pour :

- des séries à termes positifs à partir d'un certain rang

## II. Séries à termes positifs

Tout ce qui suit est aussi valable pour :

- des séries à termes positifs à partir d'un certain rang
- des séries à termes négatifs, à quelques inversions d'inégalités près.

## II-1 Comparaisons entre séries à termes positifs

## II-1 Comparaisons entre séries à termes positifs

### Proposition 2.1

*Soit $\sum u_n$ une série* **à termes positifs**. *Alors soit $\sum u_n$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$.*

## II-1 Comparaisons entre séries à termes positifs

### Proposition 2.1

*Soit $\sum u_n$ une série* **à termes positifs**. *Alors soit $\sum u_n$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$.*

### Théorème 2.2

**(Théorème de comparaison des séries à termes positifs)**

*Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* **à termes positifs** *telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :*

## II-1 Comparaisons entre séries à termes positifs

### Proposition 2.1

*Soit $\sum u_n$ une série* **à termes positifs**. *Alors soit $\sum u_n$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$.*

### Théorème 2.2

**(Théorème de comparaison des séries à termes positifs)**

*Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* **à termes positifs** *telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :*

1. *si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi ;*

## II-1 Comparaisons entre séries à termes positifs

### Proposition 2.1

*Soit* $\sum u_n$ *une série* **à termes positifs**. *Alors soit* $\sum u_n$ *converge, soit elle diverge vers* $+\infty$.

### Théorème 2.2

**(Théorème de comparaison des séries à termes positifs)**

*Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* **à termes positifs** *telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. *Alors :*

1. *si* $\sum v_n$ *converge,* $\sum u_n$ *converge aussi ;*
2. *si* $\sum u_n$ *diverge,* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

## II-1 Comparaisons entre séries à termes positifs

### Proposition 2.1

*Soit* $\sum u_n$ *une série* **à termes positifs**. *Alors soit* $\sum u_n$ *converge, soit elle diverge vers* $+\infty$.

### Théorème 2.2

**(Théorème de comparaison des séries à termes positifs)**

*Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* **à termes positifs** *telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. *Alors :*

1. *si* $\sum v_n$ *converge,* $\sum u_n$ *converge aussi ;*
2. *si* $\sum u_n$ *diverge,* $\sum v_n$ *diverge aussi.*
   *De plus, si la divergence est* **grossière** *pour* $\sum u_n$, *elle l'est aussi pour* $\sum v_n$.

## Corollaire 2.3

*Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconque, et $\sum v_n$ une série* **à termes positifs**. *On suppose que $u_n = o(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge absolument.*

## Corollaire 2.3

*Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconque, et* $\sum v_n$ *une série* **à termes positifs**. *On suppose que* $u_n = o(v_n)$. *Alors si* $\sum v_n$ *converge, la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*

## Théorème 2.4

**(Théorème de comparaison de séries à termes positifs équivalents)**

*Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* **à termes positifs**. *Si* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, *alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

## Corollaire 2.3

*Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconque, et* $\sum v_n$ *une série* **à termes positifs**. *On suppose que* $u_n = o(v_n)$. *Alors si* $\sum v_n$ *converge, la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*

## Théorème 2.4

**(Théorème de comparaison de séries à termes positifs équivalents)**

*Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* **à termes positifs**. *Si* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, *alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

## Remarque 2.5

*Contre-exemple dans le cas de séries à termes quelconques :*

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ CV$$

### Corollaire 2.3

*Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconque, et $\sum v_n$ une série* **à termes positifs**. *On suppose que $u_n = o(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge absolument.*

### Théorème 2.4

**(Théorème de comparaison de séries à termes positifs équivalents)**

*Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* **à termes positifs**. *Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

### Remarque 2.5

*Contre-exemple dans le cas de séries à termes quelconques :*
$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *CV et* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ *DV.*

# II-2. Comparaison entre une série et une intégrale

## II-2. Comparaison entre une série et une intégrale

### Théorème 2.6

**(Théorème de comparaison entre série et intégrale)**

*Soit* $a \in \mathbb{R}_+$ *et soit* $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *une fonction* **continue décroissante et positive**. *Alors :*

$$\sum_{n \geqslant a} f(n) \text{ } CV \iff x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

## II-2. Comparaison entre une série et une intégrale

### Théorème 2.6

**(Théorème de comparaison entre série et intégrale)**

*Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue décroissante et positive**. *Alors :*

$$\sum_{n \geqslant a} f(n) \ CV \iff x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

Démonstration à connaître et **savoir refaire** (souvent redemandée)

## Théorème 2.7

**(Nature des séries de Riemann)**

*Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

.

### Théorème 2.7
**(Nature des séries de Riemann)**

*Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

*Cette série est appelée* **série de Riemann de paramètre** $\alpha$.

## Théorème 2.7
**(Nature des séries de Riemann)**

*Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

*Cette série est appelée* **série de Riemann de paramètre** $\alpha$.

## Exemple 2.8
*Autre exemple : séries de Bertrand de paramètres* $1$ *et* $\beta$.

*Soit* $\beta \in \mathbb{R}$. *Alors la série* $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tq $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tq $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $nu_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.*

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tq $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $nu_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Idée de la démarche : écrire la limite obtenue sous la forme $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour le cas de convergence,

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tq $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $nu_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Idée de la démarche : écrire la limite obtenue sous la forme $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour le cas de convergence, et $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ pour le cas de divergence,

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tq $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $nu_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Idée de la démarche : écrire la limite obtenue sous la forme $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour le cas de convergence, et $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ pour le cas de divergence, puis utiliser le théorème de comparaison par $o$

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tq $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $nu_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Idée de la démarche : écrire la limite obtenue sous la forme $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour le cas de convergence, et $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ pour le cas de divergence, puis utiliser le théorème de comparaison par $o$ (ou sa contraposée pour le cas de DV)

## II-3 Comparaison avec une série de Riemann

### Théorème 2.9

**(Règle de Riemann, ou règle " $n^\alpha u_n$ ", HP)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tq $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $nu_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Idée de la démarche : écrire la limite obtenue sous la forme $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour le cas de convergence, et $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ pour le cas de divergence, puis utiliser le théorème de comparaison par $o$ (ou sa contraposée pour le cas de DV)

### Exemple 2.10

*Exemple développé : séries de Bertrand*

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

### Théorème 2.11

**(Règle de d'Alembert, hors-programme, méthode à retenir)**

*Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconques tq* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \longrightarrow \ell$

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

### Théorème 2.11
**(Règle de d'Alembert, hors-programme, méthode à retenir)**

*Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconques tq* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \longrightarrow \ell$

1. *Si* $0 \leqslant \ell < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument.*

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

### Théorème 2.11

**(Règle de d'Alembert, hors-programme, méthode à retenir)**

*Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconques tq* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \longrightarrow \ell$

1. *Si* $0 \leqslant \ell < 1$*, alors* $\sum u_n$ *converge absolument.*
2. *Si* $\ell > 1$*, alors* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

### Théorème 2.11

**(Règle de d'Alembert, hors-programme, méthode à retenir)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques tq $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \longrightarrow \ell$*

1. *Si $0 \leqslant \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.*

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

### Théorème 2.11

**(Règle de d'Alembert, hors-programme, méthode à retenir)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques tq $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \longrightarrow \ell$*

1. *Si $0 \leqslant \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.*

Idée de la démarche :

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

### Théorème 2.11
**(Règle de d'Alembert, hors-programme, méthode à retenir)**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques tq $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \longrightarrow \ell$*

1. *Si $0 \leqslant \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.*

Idée de la démarche :

- Si $\ell < 1$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est tellement proche de $\ell$ qu'il est plus petit qu'un certain $\ell'$ coincé entre $\ell$ et 1. On peut alors pour $n$ assez grand majorer $(u_n)$ par une suite géométrique de raison $\ell'$

## II-4. Comparaison avec une série géométrique

### Théorème 2.11

**(Règle de d'Alembert, hors-programme, méthode à retenir)**

*Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconques tq* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) \longrightarrow \ell$

1. *Si* $0 \leqslant \ell < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument.*
2. *Si* $\ell > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*
3. *Si* $\ell = 1$, *on ne peut pas conclure par cette méthode.*

Idée de la démarche :

- Si $\ell < 1$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est tellement proche de $\ell$ qu'il est plus petit qu'un certain $\ell'$ coincé entre $\ell$ et 1. On peut alors pour $n$ assez grand majorer $(u_n)$ par une suite géométrique de raison $\ell'$
- Si $\ell > 1$, pour $n$ assez grand $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et $(u_n)$ est strictement croissante et positive, donc ne tend pas vers 0.

## Exemple 2.12

*Exemple développé : séries exponentielles*

## Exemple 2.12

*Exemple développé : séries exponentielles*

## Théorème 2.13

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

## Théorème 2.14

**(Formule du binôme négatif, à connaître)**

*Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n.$$

## Théorème 2.14
**(Formule du binôme négatif, à connaître)**

*Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < 1$, *et tout* $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n.$$

*De plus, cette série est alors absolument convergente*

## Théorème 2.14

**(Formule du binôme négatif, à connaître)**

*Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < 1$, *et tout* $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n.$$

*De plus, cette série est alors absolument convergente*

Lorsque $p \in \mathbb{Z}_-$ c'est la formule du binôme de Newton.

## Théorème 2.14

**(Formule du binôme négatif, à connaître)**

*Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n.$$

*De plus, cette série est alors absolument convergente*

Lorsque $p \in \mathbb{Z}_-$ c'est la formule du binôme de Newton.

Formule du binôme négatif = formule de dérivation terme à terme des séries géométriques.

## Théorème 2.14
**(Formule du binôme négatif, à connaître)**
*Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < 1$, *et tout* $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n.$$

*De plus, cette série est alors absolument convergente*

Lorsque $p \in \mathbb{Z}_-$ c'est la formule du binôme de Newton.

Formule du binôme négatif = formule de dérivation terme à terme des séries géométriques.

Attention, sauf dans ce cas précis, on ne dérive pas terme à terme une série !

# III. Étude de la semi-convergence

## III. Étude de la semi-convergence

### Théorème 3.1

**(Théorème spécial de convergence des séries alternées)**

*Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* **décroissante de limite nulle**. *Alors* $\sum(-1)^n a_n$ *converge.*

## III. Étude de la semi-convergence

### Théorème 3.1

**(Théorème spécial de convergence des séries alternées)**

*Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* **décroissante de limite nulle**. *Alors* $\sum(-1)^n a_n$ *converge.*

Idée de la démarche :

## III. Étude de la semi-convergence

### Théorème 3.1

**(Théorème spécial de convergence des séries alternées)**
*Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* **décroissante de limite nulle**. *Alors* $\sum(-1)^n a_n$ *converge.*

Idée de la démarche : montrer que les suites partielles $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ définissent deux suites adjacentes, qui ont donc même limite. Conclure.

## III. Étude de la semi-convergence

### Théorème 3.1

**(Théorème spécial de convergence des séries alternées)**
*Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite* **décroissante de limite nulle**. *Alors $\sum(-1)^n a_n$ converge.*

Idée de la démarche : montrer que les suites partielles $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ définissent deux suites adjacentes, qui ont donc même limite. Conclure.

### Exemple 3.2

*Exemple développé : Série harmonique alternée.*