Chapitre 4

Intégrales impropres

Introduction

Introduction

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Introduction

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Rappel :

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$, et on peut donc donner un sens à $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. De même si f est seulement continue par morceaux sur $[a, b]$.

Introduction

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Rappel :

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$, et on peut donc donner un sens à $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. De même si f est seulement continue par morceaux sur $[a, b]$.

But :

Donner un sens, lorsque cela est possible, à $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque f n'est définie (et continue) que sur $]a, b[$, a et b pouvant éventuellement être infinis. On parle d'intégrale impropre (ou intégrale généralisée)

I. Révisions sur les intégrales définies

I-1. Définition des intégrales

I. Révisions sur les intégrales définies

I-1. Définition des intégrales

L'intégrale est obtenue par approximation par des fonctions en escaliers, s'il y a cohérence dans ces approximations

I. Révisions sur les intégrales définies

I-1. Définition des intégrales

L'intégrale est obtenue par approximation par des fonctions en escaliers, s'il y a cohérence dans ces approximations

Théorème 1.1

Tout fonction continue (ou au moins continue par morceaux) sur un intervalle $[a, b]$ *est intégrable.*

I. Révisions sur les intégrales définies

I-1. Définition des intégrales

L'intégrale est obtenue par approximation par des fonctions en escaliers, s'il y a cohérence dans ces approximations

Théorème 1.1

Tout fonction continue (ou au moins continue par morceaux) sur un intervalle $[a, b]$ *est intégrable.*

Théorème 1.2

(Sommes de Riemann)

Soit f *une fonction continue sur* $[a, b]$*. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

I-2 Propriétés de l'intégrale

I-2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.3

I-2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.3

- **Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles :**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

I-2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.3

- **Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles :**
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- **Linéarité :**
$\mathrm{Int}([a,b])$ *est un espace vectoriel, et* $\int_{[a,b]} : \mathrm{Int}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une forme linéaire :*
$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

I-2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.3

- **Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles :**
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- **Linéarité :**
$\mathrm{Int}([a,b])$ *est un espace vectoriel, et* $\int_{[a,b]} : \mathrm{Int}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une forme linéaire :*
$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
- **Positivité, ou croissance, de l'intégrale :**
$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

I-2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.3

- **Additivité par rapport aux bornes – relation de Chasles :**
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- **Linéarité :**
$\mathrm{Int}([a,b])$ *est un espace vectoriel, et* $\int_{[a,b]} : \mathrm{Int}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une forme linéaire :*
$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
- **Positivité, ou croissance, de l'intégrale :**
$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

- **Stricte positivité de l'intégrale :**

  f *continue* sur $[a, b]$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$

- **Stricte positivité de l'intégrale :**

  f *continue* sur $[a, b]$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$

  f continue, $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$

- **Stricte positivité de l'intégrale :**

  f *continue* sur $[a, b]$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$

  f continue, $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$

- **Majoration, ou inégalité triangulaire**

  $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

I-3. Calcul des intégrales – Primitives

I-3. Calcul des intégrales – Primitives

Théorème 1.4

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors f admet une primitive sur I.
De plus, soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. L'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

I-3. Calcul des intégrales – Primitives

Théorème 1.4

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors f admet une primitive sur I.
De plus, soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. L'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ est :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.5

(Théorème fondamental du calcul des intégrales)
Soit f intégrable et continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Théorème 1.6
(Intégration par parties)

Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 1.6
(Intégration par parties)

Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 1.7
(Changement de variables)

Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ vers $[\alpha, \beta]$. Alors f est intégrable entre $u(a)$ et $u(b)$, et :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $x = u(t)$.

Théorème 1.8
(Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes)

Soit I et J deux intervalle Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J, et soit f une fonction continue sur J. Soit G la fonction définie par : $\forall x \in I, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et :
$\forall x \in I, \quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$

Théorème 1.8
(Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes)

Soit I et J deux intervalle Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J, et soit f une fonction continue sur J. Soit G la fonction définie par : $\forall x \in I, \quad G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et :
$\forall x \in I, \quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$

Intégrales d'une fonction f T-périodique :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^{y+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème 1.8
(Dérivation d'intégrales dépendant de leurs bornes)

Soit I et J deux intervalle Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J, et soit f une fonction continue sur J. Soit G la fonction définie par : $\forall x \in I, \quad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et :
$\forall x \in I, \quad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$

Intégrales d'une fonction f T-périodique :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^{y+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De l'importance de bien connaître son tableau des primitives classiques !

II. Notion d'intégrale impropre

II-1. Cas des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert

II. Notion d'intégrale impropre

II-1. Cas des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert

Définition 2.1

Soit f continue sur $[a, b[$, $a < b \leqslant +\infty$.

II. Notion d'intégrale impropre

II-1. Cas des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert

Définition 2.1

Soit f continue sur $[a, b[$, $a < b \leqslant +\infty$.

1. *On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si*

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b^-.

II. Notion d'intégrale impropre

II-1. Cas des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert

Définition 2.1

Soit f continue sur $[a, b[$, $a < b \leqslant +\infty$.

1. *On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si*

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. Dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. Notion d'intégrale impropre

II-1. Cas des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert

Définition 2.1

Soit f continue sur $[a, b[$, $a < b \leqslant +\infty$.

1. *On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si*

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. Dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente si F n'admet pas de limite finie en b^-.*

3. Dans le cas particulier où F tend vers $+\infty$ en b^-, on s'autorisera à écrire :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

3. Dans le cas particulier où F tend vers $+\infty$ en b^-, on s'autorisera à écrire :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

4. Dans tous les cas (convergence ou divergence), on appelle $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ intégrale impropre (ou généralisée).

3. Dans le cas particulier où F tend vers $+\infty$ en b^-, on s'autorisera à écrire :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

4. Dans tous les cas (convergence ou divergence), on appelle $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ intégrale impropre (ou généralisée).
5. On dit que b est un point d'impropriété de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une impropriété en b.

On définirait de la même façon une intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$, admettant donc une impropriété en a, ainsi que les notions de convergence et de divergence associées.

Proposition 2.2

Soit $b \neq +\infty$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, admettant une limite finie en b. Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[a, b]$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.2

Soit $b \neq +\infty$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, admettant une limite finie en b. Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[a, b]$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit dans ce cas que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en la borne b.

Proposition 2.2

Soit $b \neq +\infty$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, admettant une limite finie en b. Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[a, b]$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit dans ce cas que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en la borne b.

Remarque 2.3

La borne b doit être FINIE.

Exemples 2.4

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$

Exemples 2.4

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$ *est divergente.*

Exemples 2.4

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$ *est divergente.*
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Théorème 2.5
(Propriétés de convergence des intégrales de Riemann)

1. *Intégrales de Riemann en $+\infty$:*

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Théorème 2.5
(Propriétés de convergence des intégrales de Riemann)

1. *Intégrales de Riemann en* $+\infty$ *:*

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

2. *Intégrales de Riemann en* $a^+ \in \mathbb{R}$ $(a < b)$

   L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(x-a)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$

Théorème 2.5
(Propriétés de convergence des intégrales de Riemann)

1. *Intégrales de Riemann en $+\infty$:*

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

2. *Intégrales de Riemann en* $a^+ \in \mathbb{R}$ $(a < b)$

   L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(x-a)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$

3. *Intégrales de Riemann en* $b^- \in \mathbb{R}$ $(a < b)$

   L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(x-b)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$

Théorème 2.5
(Propriétés de convergence des intégrales de Riemann)

1. *Intégrales de Riemann en $+\infty$:*

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

2. *Intégrales de Riemann en* $a^+ \in \mathbb{R}$ $(a < b)$

   L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(x-a)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$

3. *Intégrales de Riemann en* $b^- \in \mathbb{R}$ $(a < b)$

   L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(x-b)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$

Cas particulier :

soit $b > 0$, $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Un dernier exemple :

Exemple 2.6

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, *définie sur tout intervalle* $[n, n+1]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *par :*

- $f(x) = 0$ *si* $x \notin \left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^3}\right]$;
- $f(x) = 2n^4 \left(x - n - \frac{1}{2}\right) + n$ *si* $x \in \left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2}\right]$;
- $f(x) = -2n^4 \left(x - n - \frac{1}{2}\right) + n$ *si* $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^3}\right]$.

Un dernier exemple :

Exemple 2.6

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, *définie sur tout intervalle* $[n, n+1]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *par :*

- $f(x) = 0$ *si* $x \notin \left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^3}\right]$;
- $f(x) = 2n^4 \left(x - n - \frac{1}{2}\right) + n$ *si* $x \in \left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2}\right]$;
- $f(x) = -2n^4 \left(x - n - \frac{1}{2}\right) + n$ *si* $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^3}\right]$.

$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente, mais* f *ne tend pas vers* 0 *en* $+\infty$.

Un dernier exemple :

Exemple 2.6

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, *définie sur tout intervalle* $[n, n+1]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *par :*

- $f(x) = 0$ *si* $x \notin \left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^3}\right]$;
- $f(x) = 2n^4 \left(x - n - \frac{1}{2}\right) + n$ *si* $x \in \left[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2}\right]$;
- $f(x) = -2n^4 \left(x - n - \frac{1}{2}\right) + n$ *si* $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^3}\right]$.

$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente, mais* f *ne tend pas vers* 0 *en* $+\infty$.

Ainsi, le fait que f *ne tende pas vers* 0 *en* $+\infty$ *ne suffit pas à obtenir la divergence d'une intégrale, même si* f *est positive. C'est une différence importante par rapport à la convergence des séries.*

Définition 2.7

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Le reste de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction R définie pour tout $x \in [a, b[$ par :

$$R(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 2.7

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Le reste de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction R définie pour tout $x \in [a, b[$ par :

$$R(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.8

Soit f continue sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors :

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Proposition 2.9

Soit f continue sur $[a, b[$, F une primitive (quelconque) de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } F \text{ admet une limite en } b^-,$$

Proposition 2.9

Soit f continue sur $[a, b[$, F une primitive (quelconque) de f. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite en b^-, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} F(x) - F(a).$$

Proposition 2.9

Soit f continue sur $[a, b[$, F une primitive (quelconque) de f. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite en b^-, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} F(x) - F(a).$$

Cela s'adapte bien entendu pour les fonctions continues sur $]a, b]$.

II-2. Cas d'une fonction continue sur un intervalle ouvert

Définition 2.10

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$. Soit c un point quelconque de $]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si chacune des intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

II-2. Cas d'une fonction continue sur un intervalle ouvert

Définition 2.10

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$. Soit c un point quelconque de $]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si chacune des intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

II-2. Cas d'une fonction continue sur un intervalle ouvert

Définition 2.10

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$. Soit c un point quelconque de $]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si chacune des intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.11

Ni la notion de convergence, ni la valeur de l'intégrale en cas de convergence, ne dépendent du choix de c dans $]a, b[$.

Exemples 2.12

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *diverge pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemples 2.12

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *diverge pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. *Dissociez l'étude des deux bornes de l'intégrale !*

   Exemple : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \ \mathrm{d}t$.

Proposition 2.13

Soit f continue sur $]a, b[$, et F une primitive de f sur $]a, b[$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie en a et en b.

Proposition 2.13

Soit f continue sur $]a, b[$, et F une primitive de f sur $]a, b[$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie en a et en b.

Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x) = \Big[F(x)\Big]_{\lim_a}^{\lim_b}$$

Proposition 2.13

Soit f continue sur $]a,b[$, et F une primitive de f sur $]a,b[$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie en a et en b.

Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x) = \Big[F(x)\Big]_{\lim_a}^{\lim_b}$$

Exemple 2.14

Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

II-3. Cas d'une fonction continue sur une union d'intervalles ouverts

II-3. Cas d'une fonction continue sur une union d'intervalles ouverts

Définition 2.15

Soit $-\infty \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant +\infty$.
Soit f *continue sur* $]a_0, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup \cdots \cup]a_{n-1}, a_n[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si chacune des intégrales* $\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t$, $i \in [\![1, n]\!]$, *converge.*

II-3. Cas d'une fonction continue sur une union d'intervalles ouverts

Définition 2.15

Soit $-\infty \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant +\infty$.
Soit f *continue sur* $]a_0, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup \cdots \cup]a_{n-1}, a_n[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si chacune des intégrales* $\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t$, $i \in [\![1, n]\!]$, *converge.*
En cas de convergence, on définit :

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

II-3. Cas d'une fonction continue sur une union d'intervalles ouverts

Définition 2.15

Soit $-\infty \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant +\infty$.
Soit f *continue sur* $]a_0, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup \cdots \cup]a_{n-1}, a_n[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si chacune des intégrales* $\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t$, $i \in [\![1, n]\!]$, *converge.*
En cas de convergence, on définit :

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ *admet des impropriétés en* $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Corollaire 2.16

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, c'est-à-dire telle qu'il existe $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ tels que f soit continue sur chaque $]a_{i-1}, a_i[$, $i \in [\![1, n]\!]$, et tels que f admette une limite à droite en tout a_i, $i \in [\![0, n-1]\!]$, et une limite à gauche en tout a_i, $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Proposition 2.17

Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ *et soit* f *continue sur* $]a_0, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup\cdots\cup]a_{n-1}, a_n[$, *et* F *une primitive de* f *sur cet ensemble. Alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* F *admet des limites à droite en tout* a_i, $i \in [\![0, n-1]\!]$, *et des limites à gauches en tout* a_i, $i \in [\![1, n]\!]$, *et dans ce cas :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a_n^-} F(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(-\lim_{x\to a_k^+} F(x) + \lim_{x\to a_k^-} F(x)\Big) - \lim_{x\to a_0^+} F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to a_k^-} F(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{x\to a_k^+} F(x).$$

III. Propriétés des intégrales impropres
III-1. Linéarité

III. Propriétés des intégrales impropres

III-1. Linéarité

Proposition 3.1

Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, *et soit* E *l'ensemble des fonctions définies et continues sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, *telles que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. Alors :*

1. *E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;*

III. Propriétés des intégrales impropres

III-1. Linéarité

Proposition 3.1

Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, *et soit* E *l'ensemble des fonctions définies et continues sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, *telles que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. Alors :*

1. E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$;
2. $\int_a^b : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une forme linéaire sur* E

Proposition 3.2

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge,*

alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

Proposition 3.2

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$.

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge,

alors $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque 3.3

En revanche, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ divergent, on ne peut rien conclure pour $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$.

III-2. Relation de Chasles

Théorème 3.4

Soit $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ *et* f *une fonction définie et continue sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$. *Soit* $c \in]a, b[$.
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent,*

III-2. Relation de Chasles

Théorème 3.4

Soit $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ *et* f *une fonction définie et continue sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$. *Soit* $c \in]a, b[$.
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent, et*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 3.5

1. *Attention à l'hypothèse $c \in]a, b[$, nécessaire ici pour obtenir la convergence des deux intégrales. Si $c \notin]a, b[$, il faut partir de l'hypothèse de convergence sur le plus grand des intervalles considérés.*

Remarque 3.5

1. *Attention à l'hypothèse $c \in]a, b[$, nécessaire ici pour obtenir la convergence des deux intégrales. Si $c \notin]a, b[$, il faut partir de l'hypothèse de convergence sur le plus grand des intervalles considérés.*
2. *Attention, généralement, on ne s'autorise pas à inverser l'ordre des bornes dans une intégrale impropre, car la borne inférieure correspond à une limite par au-dessus et la borne supérieur à une limite par en-dessous : échanger les deux bornes échangerait implicitement cette convention sur le côté par lequel on prend la limite.*

Remarque 3.5

1. *Attention à l'hypothèse $c \in]a, b[$, nécessaire ici pour obtenir la convergence des deux intégrales. Si $c \notin]a, b[$, il faut partir de l'hypothèse de convergence sur le plus grand des intervalles considérés.*
2. *Attention, généralement, on ne s'autorise pas à inverser l'ordre des bornes dans une intégrale impropre, car la borne inférieure correspond à une limite par au-dessus et la borne supérieur à une limite par en-dessous : échanger les deux bornes échangerait implicitement cette convention sur le côté par lequel on prend la limite.*
   Ainsi, faites attention à la façon d'exprimer la relation de Chasles lorsque $c \notin]a, b[$: se ramener à la situation du théorème, en échangeant le rôle des variables.

III-3. Positivité

III-3. Positivité

Proposition 3.6

(Positivité de l'intégrale)

Soit $a = a_0 < a_1 \cdots < a_n = b$ *et* f *définie et continue sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ *telle que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. Alors si* $f \geqslant 0$ *sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Corollaire 3.7
(Croissance de l'intégrale)

Supposons que f et g sont deux fonctions définies et continues sur $[a,b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors, si $f \leqslant g$ sur $[a,b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3.8

(Stricte positivité de l'intégrale)
Soit $a = a_0 < a_1 \cdots < a_n = b$ *et* f *définie et continue sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ *telle que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. Alors si* $f \geqslant 0$ *sur* $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, *et si* f *n'est pas identiquement nulle sur cet ensemble, on a :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

IV. Critères de convergence pour les intégrales de fonctions positives

IV. Critères de convergence pour les intégrales de fonctions positives

Tous les critères sont donnés pour des intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admettant une seule impropriété en b.

IV. Critères de convergence pour les intégrales de fonctions positives

Tous les critères sont donnés pour des intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admettant une seule impropriété en b.

Ces critères se généralisent bien entendu aux intégrales admettant une impropriété en leur borne inférieure, puis aux intégrales de fonctions continues sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de point, par découpage en plusieurs intégrales impropres en une seule borne.

IV. Critères de convergence pour les intégrales de fonctions positives

Tous les critères sont donnés pour des intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admettant une seule impropriété en b.

Ces critères se généralisent bien entendu aux intégrales admettant une impropriété en leur borne inférieure, puis aux intégrales de fonctions continues sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de point, par découpage en plusieurs intégrales impropres en une seule borne.

IV. Critères de convergence pour les intégrales de fonctions positives

Tous les critères sont donnés pour des intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admettant une seule impropriété en b.

Ces critères se généralisent bien entendu aux intégrales admettant une impropriété en leur borne inférieure, puis aux intégrales de fonctions continues sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de point, par découpage en plusieurs intégrales impropres en une seule borne.

Dans tout ce paragraphe, les fonctions f et g sont définies et continues sur un intervalle $[a, b[$.

IV-1. Un lemme

Lemme 4.1

Si $f \geqslant 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si la fonction* $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est bornée sur* $[a, b[$.

IV-2. Critère de comparaison par inégalité

Proposition 4.2

Si pour tout $x \in [a, b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *alors :*

1. *si* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge*, *alors* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge* ;

IV-2. Critère de comparaison par inégalité

Proposition 4.2

Si pour tout $x \in [a, b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *alors :*

1. *si* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, alors* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge ;*
2. *si* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

IV-2. Critère de comparaison par inégalité

Proposition 4.2

Si pour tout $x \in [a, b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *alors :*

1. *si* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, alors* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge ;*
2. *si* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Remarque 4.3

Attention à l'hypothèse de positivité des fonctions qu'on intègre !

Exemples 4.4

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge ;*

Exemples 4.4

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge ;*
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge (archi-classique !) ;*

Exemples 4.4

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge ;*
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge (archi-classique !) ;*
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ *converge.*

IV-3. Critère de comparaison par o

Proposition 4.5

Supposons que f et g sont positives (et toujours continues) sur $[a, b[$, et qu'au voisinage de b, $f(x) = o(g(x))$. Alors :

IV-3. Critère de comparaison par o

Proposition 4.5

Supposons que f et g sont positives (et toujours continues) sur $[a, b[$, et qu'au voisinage de b, $f(x) = o(g(x))$. Alors :

- *si* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge ;*

IV-3. Critère de comparaison par o

Proposition 4.5

Supposons que f et g sont positives (et toujours continues) sur $[a, b[$, et qu'au voisinage de b, $f(x) = o(g(x))$. Alors :

- *si* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge ;*
- *si* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, alors* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

IV-3. Critère de comparaison par o

Proposition 4.5

Supposons que f et g sont positives (et toujours continues) sur $[a, b[$, et qu'au voisinage de b, $f(x) = o(g(x))$. Alors :

- *si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;*
- *si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Remarque 4.6

L'hypothèse de positivité de f est en fait inutile : on obtient la convergence absolue de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples 4.7

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Exemples 4.7

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *converge.*
2. *(Intégrales de Bertrand en* $+\infty$*)*
   $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$ *converge ssi* $\alpha > 1$*, ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$

Exemples 4.7

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *converge.*
2. *(Intégrales de Bertrand en* $+\infty$*)*
   $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$ *converge ssi* $\alpha > 1$, *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$
3. *(Intégrales de Bertrand en* 0*)*
   $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\,\mathrm{d}t$ *converge ssi* $\alpha < 1$ *ou si* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

IV-4. Critère de comparaison par équivalents

Théorème 4.8

On suppose f et g positives et continues sur $[a, b[$. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

IV-4. Critère de comparaison par équivalents

Théorème 4.8

On suppose f et g positives et continues sur $[a, b[$. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature.

IV-4. Critère de comparaison par équivalents

Théorème 4.8

On suppose f et g positives et continues sur $[a, b[$. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature.

Remarque 4.9

Si f et g sont continues sur $[a, b[\cup]b, c]$, il convient de séparer l'étude à droite et à gauche au point b, et donc de considérer un équivalent à droite, et un équivalent à gauche au point b.

Exemples 4.10

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x(x-1)(x-2)|}}$ *est convergente.*

Exemples 4.10

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x(x-1)(x-2)|}}$ *est convergente.*
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

V. Cas des fonctions non positives

V-1. Convergence absolue

V. Cas des fonctions non positives

V-1. Convergence absolue

Définition 5.1

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

V. Cas des fonctions non positives

V-1. Convergence absolue

Définition 5.1

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Par extention, on définit la convergence absolue pour une fonction admettant plusieurs points d'impropriété.

V. Cas des fonctions non positives

V-1. Convergence absolue

Définition 5.1

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Par extention, on définit la convergence absolue pour une fonction admettant plusieurs points d'impropriété.

Théorème 5.2

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 5.3
(Inégalité triangulaire)

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* absolument, *alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 5.3
(Inégalité triangulaire)

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument, alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 5.4

Convergence et encadrement de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

V-2. Semi-convergence

Définition 5.5

On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est semi-convergente, si elle est convergente sans être absolument convergente.*

V-2. Semi-convergence

Définition 5.5

On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est semi-convergente, si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Exemple 5.6

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ *est semi-convergente.*

VI. Comparaison série/intégrale

VI. Comparaison série/intégrale

Théorème 6.1

Soit $f : [a, +\infty[$ *une fonction continue, décroissante et positive.*

VI. Comparaison série/intégrale

Théorème 6.1

Soit $f : [a, +\infty[$ *une fonction continue, décroissante et positive. Alors :*

$$\sum_{n \geqslant a} f(n) \text{ converge} \iff \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

VI. Comparaison série/intégrale

Théorème 6.1

Soit $f : [a, +\infty[$ une fonction continue, décroissante et positive. Alors :

$$\sum_{n \geqslant a} f(n) \text{ converge} \iff \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exemple 6.2

On retrouve de la sorte les propriétés de convergence des séries de Riemann ou des séries de Bertrand.

VII. Techniques de calcul des intégrales impropres
VII-1. Intégration par parties

VII. Techniques de calcul des intégrales impropres
VII-1. Intégration par parties

Théorème 7.1
Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, telles que le produit uv admette une limite en b.

VII. Techniques de calcul des intégrales impropres
VII-1. Intégration par parties

Théorème 7.1

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, telles que le produit uv admette une limite en b.

Alors $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature,*

VII. Techniques de calcul des intégrales impropres
VII-1. Intégration par parties

Théorème 7.1

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, telles que le produit uv admette une limite en b.

Alors $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature,*

et en cas de convergence,

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^{\lim_{b^-}} - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{t\to b^-} u(t)v(t) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 7.2

Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, et si uv admet des limites en a et en b,

Corollaire 7.2

Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, et si uv admet des limites en a et en b,

alors $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature,*

Corollaire 7.2

Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$, et si uv admet des limites en a et en b,
alors $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature,
et en cas de convergence,

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_{\lim_{a^+}}^{\lim_{b^-}} - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{t\to b^-} u(t)v(t) - \lim_{x\to a^+} u(t)v(t) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 7.3

Dans les deux résultats ci-dessus, on peut partir d'une intégrale définie (non impropre) pour arriver à une intégrale impropre. C'est le cas par exemple si v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et si u est continue sur $[a, b]$, mais de classe $\mathcal{C}^1$ seulement sur $[a, b[$.

Remarque 7.3

Dans les deux résultats ci-dessus, on peut partir d'une intégrale définie (non impropre) pour arriver à une intégrale impropre. C'est le cas par exemple si v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et si u est continue sur $[a, b]$, mais de classe $\mathcal{C}^1$ seulement sur $[a, b[$.

Théorème 7.4

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. On suppose que uv n'admet pas de limite en b.

Si $\int_a^b uv'$ converge, alors $\int_a^b u'v$ diverge.

Remarque 7.3

Dans les deux résultats ci-dessus, on peut partir d'une intégrale définie (non impropre) pour arriver à une intégrale impropre. C'est le cas par exemple si v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et si u est continue sur $[a, b]$, mais de classe $\mathcal{C}^1$ seulement sur $[a, b[$.

Théorème 7.4

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. On suppose que uv n'admet pas de limite en b.

Si $\int_a^b uv'$ converge, alors $\int_a^b u'v$ diverge.

Remarque 7.5

- *En pratique, il est fréquent de restreindre l'intervalle d'intégration à* $[a, x]$, $x < b$, *afin de faire l'IPP sur une intégrale définie, puis de passer à la limite lorsque* x *tend vers* b. *Cela peut prouver du même coup la convergence de l'intégrale initiale.*

Remarque 7.5

- *En pratique, il est fréquent de restreindre l'intervalle d'intégration à $[a, x]$, $x < b$, afin de faire l'IPP sur une intégrale définie, puis de passer à la limite lorsque x tend vers b. Cela peut prouver du même coup la convergence de l'intégrale initiale.*
- *Ceci n'est pas une obligation, à condition de justifier les convergences, et de donner les hypothèses adéquates d'existence de limites pour le produit uv.*

Remarque 7.5

- *En pratique, il est fréquent de restreindre l'intervalle d'intégration à $[a, x]$, $x < b$, afin de faire l'IPP sur une intégrale définie, puis de passer à la limite lorsque x tend vers b. Cela peut prouver du même coup la convergence de l'intégrale initiale.*
- *Ceci n'est pas une obligation, à condition de justifier les convergences, et de donner les hypothèses adéquates d'existence de limites pour le produit uv.*
- *En revanche, dans la situation où on part d'une intégrale convergente, mais où uv n'admet pas de limite finie, il est nécessaire de faire l'intégration par parties sur un intervalle restreint, et d'étudier les compensations des divergences.*

Exemples 7.6

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$

Exemples 7.6

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}.$

Exemples 7.6

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}.$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\ln 2.$

VII-2. Changements de variable

La nécessité de mettre les bornes dans l'ordre pour une intégrale impropre complique un peu l'énoncé du changement de variables. On va être amené à distinguer suivant que le changement de variables échange les bornes ou non.

VII-2. Changements de variable

La nécessité de mettre les bornes dans l'ordre pour une intégrale impropre complique un peu l'énoncé du changement de variables. On va être amené à distinguer suivant que le changement de variables échange les bornes ou non.

VII-2. Changements de variable

La nécessité de mettre les bornes dans l'ordre pour une intégrale impropre complique un peu l'énoncé du changement de variables. On va être amené à distinguer suivant que le changement de variables échange les bornes ou non.

Remarquez que dans la formule du changement de variable pour les intégrales impropres, les hypothèses faites sur φ sont plus fortes que pour le changement de variables pour les intégrales définies.

Théorème 7.7

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Théorème 7.7

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature*,

Théorème 7.7

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature, et en cas de convergence :*

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *si φ est croissante*

Théorème 7.7

Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature, et en cas de convergence :*

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *si φ est croissante*
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *si φ est décroissante*

Remarque 7.8

Tout comme la formule d'intégration par parties, ce théorème donne avant tout un critère de comparaison de la nature de deux intégrales.

Remarque 7.8

Tout comme la formule d'intégration par parties, ce théorème donne avant tout un critère de comparaison de la nature de deux intégrales.

Exemple 7.9

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2 t)^2} = \frac{\pi}{4}.$

Remarque 7.8

Tout comme la formule d'intégration par parties, ce théorème donne avant tout un critère de comparaison de la nature de deux intégrales.

Exemple 7.9

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2 t)^2} = \frac{\pi}{4}.$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$

VIII. Intégrales classiques VIII-1. Intégrale de Gauss

Théorème 8.1
(Intégrale de Gauss)

1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge, et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

VIII. Intégrales classiques VIII-1. Intégrale de Gauss

Théorème 8.1
(Intégrale de Gauss)

1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge, et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. *L'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *converge, et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

VIII-2. La fonction Gamma

Définition 8.2

La fonction Γ est la fonction définie, pour tout réel x pour lequel cette intégrale converge, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}.$$

VIII-2. La fonction Gamma

Définition 8.2

La fonction Γ *est la fonction définie, pour tout réel* x *pour lequel cette intégrale converge, par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}.$$

Proposition 8.3

1. *Le domaine de définition de* Γ *est* $D_\Gamma =]0, +\infty[$.

VIII-2. La fonction Gamma

Définition 8.2

La fonction Γ *est la fonction définie, pour tout réel* x *pour lequel cette intégrale converge, par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}.$$

Proposition 8.3

1. *Le domaine de définition de* Γ *est* $D_\Gamma =]0, +\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

VIII-2. La fonction Gamma

Définition 8.2

La fonction Γ *est la fonction définie, pour tout réel* x *pour lequel cette intégrale converge, par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}.$$

Proposition 8.3

1. *Le domaine de définition de* Γ *est* $D_\Gamma =]0, +\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$

VIII-2. La fonction Gamma

Définition 8.2

La fonction Γ *est la fonction définie, pour tout réel* x *pour lequel cette intégrale converge, par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}.$$

Proposition 8.3

1. *Le domaine de définition de* Γ *est* $D_\Gamma =]0, +\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.