
Alain Troesch
Cours de mathématiques en ECS2
Lycée La Bruyère (Versailles)
Année scolaire 2012/2013

Probabilités – Chapitre 1

Rappels de probabilités discrètes et générales

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

I. Principes généraux du calcul des probabilités

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

I. Principes généraux du calcul des probabilités

I-1. Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

I. Principes généraux du calcul des probabilités

I-1. Probabilité d'un événement décrit pas une expérience concrète

Les 4 étapes de la rédaction d'un calcul de probabilité

I. Principes généraux du calcul des probabilités

I-1. Probabilité d'un événement décrit pas une expérience concrète

Les 4 étapes de la rédaction d'un calcul de probabilité

1. Définition d'**événements élémentaires** issus de l'expérience décrite, éventuellement numérotés (si expérience répétée par exemple P/F).

I. Principes généraux du calcul des probabilités

I-1. Probabilité d'un événement décrit pas une expérience concrète

Les 4 étapes de la rédaction d'un calcul de probabilité

1. Définition d'**événements élémentaires** issus de l'expérience décrite, éventuellement numérotés (si expérience répétée par exemple P/F).
2. Description à l'aide d'une **phrase** (CNS de réalisation) :
“ L'événement *A* est réalisé si et seulement si ... ”

I. Principes généraux du calcul des probabilités

I-1. Probabilité d'un événement décrit pas une expérience concrète

Les 4 étapes de la rédaction d'un calcul de probabilité

1. Définition d'**événements élémentaires** issus de l'expérience décrite, éventuellement numérotés (si expérience répétée par exemple P/F).
2. Description à l'aide d'une **phrase** (CNS de réalisation) :
“ L'événement A est réalisé si et seulement si ... ”
3. **Traduction ensembliste** (unions, intersections, complémentaires d'événements élémentaires).

I. Principes généraux du calcul des probabilités

I-1. Probabilité d'un événement décrit pas une expérience concrète

Les 4 étapes de la rédaction d'un calcul de probabilité

1. Définition d'**événements élémentaires** issus de l'expérience décrite, éventuellement numérotés (si expérience répétée par exemple P/F).
2. Description à l'aide d'une **phrase** (CNS de réalisation) :
“ L'événement A est réalisé si et seulement si ... ”
3. **Traduction ensembliste** (unions, intersections, complémentaires d'événements élémentaires).
4. **Calcul de la probabilité $P(A)$** , basée sur la décomposition ensembliste, et les **règles de calcul** associées

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

Quelques règles de calcul, classées par situation

Quelques règles de calcul, classées par situation

1. COMPLÉMENTAIRE

Une seule formule à connaître, issue de la définition d'une mesure de probabilité :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

└ Principes généraux du calcul des probabilités

└ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

2. INTERSECTION.

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

2. INTERSECTION.

1. Intersection dénombrable d'événements décroissants.

2. INTERSECTION.

1. Intersection dénombrable d'événements décroissants.

Théorème 1.1 (Théorème de la limite monotone pour les $\cap$)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'événements.

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

2. INTERSECTION.

1. Intersection dénombrable d'événements décroissants.

Théorème 1.1 (Théorème de la limite monotone pour les $\cap$)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'événements.

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

2. Intersection d'événements mutuellement indépendants.

2. INTERSECTION.

1. Intersection dénombrable d'événements décroissants.

Théorème 1.1 (Théorème de la limite monotone pour les $\cap$)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'événements.

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

2. Intersection d'événements mutuellement indépendants.

Proba d'une intersection en cas d'indépendance

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**. Alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

2. INTERSECTION.

3. Intersection d'événements non nécessairement indépendants.

2. INTERSECTION.

3. Intersection d'événements non nécessairement indépendants.

Théorème 1.2 (Formule des probabilités composées)

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements telle que

$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

2. INTERSECTION.

3. Intersection d'événements non nécessairement indépendants.

Théorème 1.2 (Formule des probabilités composées)

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Utilité de cette formule :

lorsqu'il y a un enchaînement temporel des événements, chaque résultat influant sur les suivants.

2. INTERSECTION.

3. Intersection d'événements non nécessairement indépendants.

Théorème 1.2 (Formule des probabilités composées)

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Utilité de cette formule :

lorsqu'il y a un enchaînement temporel des événements, chaque résultat influant sur les suivants.

Exemple :

Urnes évolutives

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

3. UNION.

1. Union dénombrable d'événements croissants.

3. UNION.

1. Union dénombrable d'événements croissants.

Théorème 1.3 (Théorème de la limite monotone pour les $\cup$)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements.

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

3. UNION.

1. Union dénombrable d'événements croissants.

Théorème 1.3 (Théorème de la limite monotone pour les $\cup$)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements.

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

2. Événements 2 à 2 incompatibles.

3. UNION.

1. Union dénombrable d'événements croissants.

Théorème 1.3 (Théorème de la limite monotone pour les $\cup$)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements.

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

2. Événements 2 à 2 incompatibles.

Additivité (union finie), σ -additivité (union dénombrable)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille **finie ou dénombrable** d'événements **2 à 2 incompatibles**.

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

.

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

Se ramener à l'événement complémentaire.

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

Se ramener à l'événement complémentaire.

Exemple : $P(\min(X, Y) \leq x)$.

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

Se ramener à l'événement complémentaire.

Exemple : $P(\min(X, Y) \leq x)$.

4. Cas général si on connaît les intersections

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

Se ramener à l'événement complémentaire.

Exemple : $P(\min(X, Y) \leq x)$.

4. Cas général si on connaît les intersections

Formule du crible de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}).$$

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

Se ramener à l'événement complémentaire.

Exemple : $P(\min(X, Y) \leq x)$.

4. Cas général si on connaît les intersections

Formule du crible de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}).$$

Cas particuliers à bien connaître :

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

Se ramener à l'événement complémentaire.

Exemple : $P(\min(X, Y) \leq x)$.

4. Cas général si on connaît les intersections

Formule du crible de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}).$$

Cas particuliers à bien connaître :

► $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

3. UNION.

3. Cas d'un nombre fini d'événements mut. indépendants.

Se ramener à l'événement complémentaire.

Exemple : $P(\min(X, Y) \leq x)$.

4. Cas général si on connaît les intersections

Formule du crible de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}).$$

Cas particuliers à bien connaître :

- ▶ $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
- ▶ $n = 3$: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

I-2. Expérience dont l'issue dépend d'un résultat précédent

Dans certaines situations, par exemple lorsque le mode opératoire d'une expérience (par exemple la composition d'une urne) dépend du résultat d'une expérience précédente, il peut être nécessaire de discuter suivant le résultat obtenu lors de l'expérience antérieure, ce qui revient à parler en termes de conditions. Utiliser :

I-2. Expérience dont l'issue dépend d'un résultat précédent

Dans certaines situations, par exemple lorsque le mode opératoire d'une expérience (par exemple la composition d'une urne) dépend du résultat d'une expérience précédente, il peut être nécessaire de discuter suivant le résultat obtenu lors de l'expérience antérieure, ce qui revient à parler en termes de conditions. Utiliser :

Théorème 1.4 (Formule des probabilités totales)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet, fini ou dénombrable, tel que pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{T}$.

Alors la somme ci-dessous converge (absolument), et :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

I-2. Expérience dont l'issue dépend d'un résultat précédent

Dans certaines situations, par exemple lorsque le mode opératoire d'une expérience (par exemple la composition d'une urne) dépend du résultat d'une expérience précédente, il peut être nécessaire de discuter suivant le résultat obtenu lors de l'expérience antérieure, ce qui revient à parler en termes de conditions. Utiliser :

Théorème 1.4 (Formule des probabilités totales)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet, fini ou dénombrable, tel que pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{T}$. Alors la somme ci-dessous converge (absolument), et :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

A retenir :

discussion à faire $\longrightarrow$ formule des probabilités totales

- └ Principes généraux du calcul des probabilités
- └ Calcul de probabilités conditionnelles

I-3. Calcul de probabilités conditionnelles

I-3. Calcul de probabilités conditionnelles

Les résultats et les règles de calcul ci-dessus s'appliquent aussi au calcul des probabilités conditionnelles.

I-3. Calcul de probabilités conditionnelles

Les résultats et les règles de calcul ci-dessus s'appliquent aussi au calcul des probabilités conditionnelles.

CEPENDANT :

I-3. Calcul de probabilités conditionnelles

Les résultats et les règles de calcul ci-dessus s'appliquent aussi au calcul des probabilités conditionnelles.

CEPENDANT :

- **Pas d'événement conditionnel !!** C'est la **réalisation** de l'événement qui est conditionnelle. Ainsi, la troisième étape (description événementielle ensembliste) doit être évitée.

I-3. Calcul de probabilités conditionnelles

Les résultats et les règles de calcul ci-dessus s'appliquent aussi au calcul des probabilités conditionnelles.

CEPENDANT :

- ▶ **Pas d'événement conditionnel !!** C'est la réalisation de l'événement qui est conditionnelle. Ainsi, la troisième étape (description événementielle ensembliste) doit être évitée.
- ▶ Lorsqu'on rajoute via certaines formules une condition à la mesure de probabilité conditionnelle initiale, cela revient à faire l'**intersection des conditions**.

I-3. Calcul de probabilités conditionnelles

Les résultats et les règles de calcul ci-dessus s'appliquent aussi au calcul des probabilités conditionnelles.

CEPENDANT :

- ▶ **Pas d'événement conditionnel !!** C'est la réalisation de l'événement qui est conditionnelle. Ainsi, la troisième étape (description événementielle ensembliste) doit être évitée.
- ▶ Lorsqu'on rajoute via certaines formules une condition à la mesure de probabilité conditionnelle initiale, cela revient à faire l'**intersection des conditions**.

Par exemple, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet au plus dénombrable tel que pour tout $i \in I$ $P_C(A_i) \neq 0$:

$$P_C(B) = \sum_{i \in I} P_C(A_i) P_{C \cap A_i}(B).$$

II. Rappels et compléments sur les v.a.r.d.

II-1. Définitions

II. Rappels et compléments sur les v.a.r.d.

II-1. Définitions

Définition 2.1 (Aléa numérique)

Un **aléa numérique** est une application X de Ω' dans $\mathbb{R}$, telle que :

- ▶ Ω' est un sous-ensemble de Ω
- ▶ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$ (donc l'événement $X^{-1}(]-\infty, a])$ admet une probabilité).

II. Rappels et compléments sur les v.a.r.d.

II-1. Définitions

Définition 2.1 (Aléa numérique)

Un **aléa numérique** est une application X de Ω' dans $\mathbb{R}$, telle que :

- ▶ Ω' est un sous-ensemble de Ω
- ▶ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$ (donc l'événement $X^{-1}(]-\infty, a])$ admet une probabilité).

Tous les éléments de Ω n'ont pas forcément d'image par X .

II. Rappels et compléments sur les v.a.r.d.

II-1. Définitions

Définition 2.1 (Aléa numérique)

Un **aléa numérique** est une application X de Ω' dans $\mathbb{R}$, telle que :

- ▶ Ω' est un sous-ensemble de Ω
- ▶ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$ (donc l'événement $X^{-1}(]-\infty, a])$ admet une probabilité).

Tous les éléments de Ω n'ont pas forcément d'image par X .

Définition 2.2 (Variable aléatoire réelle)

Une **variable aléatoire réelle** X (**v.a.r.** en abrégé) est un aléa numérique tel que $\Omega' = \Omega$; autrement dit, tous les éléments de Ω ont une image par X .

II. Rappels et compléments sur les v.a.r.d.

II-1. Définitions

Définition 2.1 (Aléa numérique)

Un **aléa numérique** est une application X de Ω' dans $\mathbb{R}$, telle que :

- ▶ Ω' est un sous-ensemble de Ω
- ▶ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$ (donc l'événement $X^{-1}(]-\infty, a])$ admet une probabilité).

Tous les éléments de Ω n'ont pas forcément d'image par X .

Définition 2.2 (Variable aléatoire réelle)

Une **variable aléatoire réelle** X (**v.a.r.** en abrégé) est un aléa numérique tel que $\Omega' = \Omega$; autrement dit, tous les éléments de Ω ont une image par X .

Extension admissible : $\Omega' = \Omega$ presque sûrement.

Définition 2.3 (Variable aléatoire réelle discrète)

Une **variable aléatoire réelle discrète** X (**v.a.r.d.** en abrégé) est une v.a.r. telle que $X(\Omega)$ soit un ensemble fini ou dénombrable.

Définition 2.3 (Variable aléatoire réelle discrète)

Une **variable aléatoire réelle discrète** X (v.a.r.d. en abrégé) est une v.a.r. telle que $X(\Omega)$ soit un ensemble fini ou dénombrable.

Proposition 2.4

Soit X et Y deux v.a.r.d., λ un réel quelconque, et f une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, **les v.a.r. définies de la manière suivante sont encore discrètes** :

1. $X + Y : \omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$;
2. $\lambda X : \omega \mapsto \lambda X(\omega)$;
3. $XY : \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega)$;
4. $f(X) : \omega \mapsto f(X(\omega))$.

Système complet associé à une v.a.r.d.

Proposition 2.5

Soit X une v.a.r.d.. La famille d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet (ou quasi-complet) au plus dénombrable d'événements,

Système complet associé à une v.a.r.d.

Proposition 2.5

Soit X une v.a.r.d.. La famille d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet (ou quasi-complet) au plus dénombrable d'événements,

V.a.r.d. indépendantes

Deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont **indépendantes** si tous les couples d'événements $([X = k], [Y = \ell])_{(k, \ell) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ sont **indépendants**. On définit de même des familles de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

II-2. Espérance

Rappel sur les familles sommables (voir polycopié annexe)

II-2. Espérance

Rappel sur les familles sommables (voir polycopié annexe)

- La nature et la valeur de la somme d'une série **ne dépendent pas de l'ordre de sommation** si et seulement la série est **absolument convergente**.

II-2. Espérance

Rappel sur les familles sommables (voir polycopié annexe)

- ▶ La nature et la valeur de la somme d'une série ne dépendent pas de l'ordre de sommation si et seulement la série est absolument convergente.
- ▶ Il n'y a pas d'ordre privilégié sur $X(\Omega)$.

II-2. Espérance

Rappel sur les familles sommables (voir polycopié annexe)

- ▶ La nature et la valeur de la somme d'une série ne dépendent pas de l'ordre de sommation si et seulement la série est absolument convergente.
- ▶ Il n'y a pas d'ordre privilégié sur $X(\Omega)$. Pour être bien définies, les séries indexées sur $X(\Omega)$ doivent donc être **ABSOLUMENT** convergentes.

II-2. Espérance

Rappel sur les familles sommables (voir polycopié annexe)

- ▶ La nature et la valeur de la somme d'une série ne dépendent pas de l'ordre de sommation si et seulement la série est absolument convergente.
- ▶ Il n'y a pas d'ordre privilégié sur $X(\Omega)$. Pour être bien définies, les séries indexées sur $X(\Omega)$ doivent donc être **ABSOLUMENT** convergentes.

Définition 2.6

Soit X une v.a.r.d.. L'**espérance** de X est, sous réserve de **convergence ABSOLUE** :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Remarque 2.7

L'espérance peut ne pas exister :

Remarque 2.7

L'espérance peut ne pas exister :

- ▶ série divergente : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$.

Remarque 2.7

L'espérance peut ne pas exister :

- ▶ série divergente : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$.
- ▶ série semi-convergente : $X(\Omega) = \{(-1)^n n, n \in \mathbb{N}^*\}$, et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = (-1)^n n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}.$$

Théorème 2.8 (Linéarité de l'espérance)

Soit X et Y deux v.a.r.d. admettant une espérance. Alors $\lambda X + Y$ admet une espérance, et $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.

Théorème 2.8 (Linéarité de l'espérance)

Soit X et Y deux v.a.r.d. admettant une espérance. Alors $\lambda X + Y$ admet une espérance, et $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.

Théorème 2.9 (Théorème de transfert)

Soit X une v.a.r.d, et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $E(g(X))$ existe si et seulement si $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

II-3. Espérance conditionnelle

Définition 2.10 (Espérance conditionnelle)

- Soit A un événement **non presque-impossible** et X une variable aléatoire réelle discrète. Alors, on dit que X **admet une espérance conditionnelle sachant A** (ou espérance conditionnée à A) si X admet une espérance conditionnelle pour la mesure de probabilité P_A , donc si la série

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x P_A([X = x]) \text{ est absolument convergente.}$$

II-3. Espérance conditionnelle

Définition 2.10 (Espérance conditionnelle)

- Soit A un événement **non presque-impossible** et X une variable aléatoire réelle discrète. Alors, on dit que X **admet une espérance conditionnelle sachant A** (ou espérance conditionnée à A) si X admet une espérance conditionnelle pour la mesure de probabilité P_A , donc si la série
$$\sum_{x \in X(\Omega)} x P_A([X = x])$$
 est absolument convergente.
- Dans ce cas, on note $E(X \mid A)$ l'espérance conditionnelle de X sachant A , définie par :

$$E(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A(X = x).$$

Lemme 2.11

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Alors $E(X)$ existe si et seulement si $E(|X|)$ existe. En particulier, pour tout événement non presque-impossible A , $E(X | A)$ existe si et seulement si $E(|X| | A)$ existe.

Théorème 2.12 (Formule de l'espérance totale)

Soit $(A_n)_{n \in I}$ un système **quasi-complet fini ou dénombrable**, constitué d'événements **non quasi-impossibles**, et X une v.a.r.d..
Alors **X admet une espérance si et seulement si** les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

Théorème 2.12 (Formule de l'espérance totale)

Soit $(A_n)_{n \in I}$ un système **quasi-complet fini ou dénombrable**, constitué d'événements **non quasi-impossibles**, et X une v.a.r.d..

Alors **X admet une espérance si et seulement si** les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

- (i) pour tout $n \in I$, **X admet une espérance conditionnelle sachant A_n** , (donc $|X|$ aussi) ;

Théorème 2.12 (Formule de l'espérance totale)

Soit $(A_n)_{n \in I}$ un système quasi-complet fini ou dénombrable, constitué d'événements non quasi-impossibles, et X une v.a.r.d.. Alors X admet une espérance si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

- (i) pour tout $n \in I$, X admet une espérance conditionnelle sachant A_n , (donc $|X|$ aussi) ;
- (ii) la série $\sum_{n \in I} E(|X| \mid A_n) P(A_n)$ est convergente

Théorème 2.12 (Formule de l'espérance totale)

Soit $(A_n)_{n \in I}$ un système **quasi-complet fini ou dénombrable**, constitué d'événements **non quasi-impossibles**, et X une v.a.r.d.. Alors **X admet une espérance si et seulement si** les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

- (i) pour tout $n \in I$, X admet une espérance conditionnelle sachant A_n , (donc $|X|$ aussi) ;
- (ii) la série $\sum_{n \in I} E(|X| \mid A_n)P(A_n)$ est convergente

Dans ce cas : $E(X) = \sum_{n \in I} E(X \mid A_n)P(A_n)$

Remarques 2.13

1. Si certains des A_i sont de probabilité nulle, on peut les enlever du système complet : le système obtenu est encore quasi-complet, et la formule reste valable.

Remarques 2.13

1. Si certains des A_i sont de probabilité nulle, on peut les enlever du système complet : le système obtenu est encore quasi-complet, et la formule reste valable.
2. Dans le cas où le système complet $(A_i)_{i \in I}$ est fini, si la condition (i) est satisfaite, la condition (ii) l'est aussi automatiquement, puisque la somme considérée est alors finie !

Remarques 2.13

1. Si certains des A_i sont de probabilité nulle, on peut les enlever du système complet : le système obtenu est encore quasi-complet, et la formule reste valable.
2. Dans le cas où le système complet $(A_i)_{i \in I}$ est fini, si la condition (i) est satisfaite, la condition (ii) l'est aussi automatiquement, puisque la somme considérée est alors finie !
3. La série de la condition (ii) est **positive**, donc **sa convergence équivaut à sa convergence absolue**.

└ Rappels et compléments sur les v.a.r.d.

└ Variance (dispersion)

II-4 Variance (dispersion)

II-4 Variance (dispersion)

Définition 2.14 (Variance et écart-type)

Soit X une v.a.r.d. **admettant une espérance** $E(X)$. Alors, sous réserve de convergence de la série, la **variance de X** est :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x) = E((X - E(X))^2)$$

II-4 Variance (dispersion)

Définition 2.14 (Variance et écart-type)

Soit X une v.a.r.d. **admettant une espérance $E(X)$** . Alors, sous réserve de convergence de la série, la **variance de X** est :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x) = E((X - E(X))^2)$$

L'**écart-type** est alors défini par : **$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$** .

II-4 Variance (dispersion)

Définition 2.14 (Variance et écart-type)

Soit X une v.a.r.d. **admettant une espérance $E(X)$** . Alors, sous réserve de convergence de la série, la **variance de X** est :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x) = E((X - E(X))^2)$$

L'**écart-type** est alors défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 2.15

La variance peut ne pas exister même si l'espérance existe.

Théorème 2.16 (Koenig-Huyghens)

Soit X admettant une variance.

Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Théorème 2.16 (Koenig-Huyghens)

Soit X admettant une variance.

Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Plus généralement : $\forall a \in \mathbb{R}, V(X) = E((X - a)^2) - (E(X) - a)^2$.

Théorème 2.16 (Koenig-Huyghens)

Soit X admettant une variance.

Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Plus généralement : $\forall a \in \mathbb{R}, V(X) = E((X - a)^2) - (E(X) - a)^2$.

Corollaire 2.17

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(X + b) = V(X)$ et $V(aX) = a^2 V(X)$.

Théorème 2.16 (Koenig-Huyghens)

Soit X admettant une variance.

Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Plus généralement : $\forall a \in \mathbb{R}, V(X) = E((X - a)^2) - (E(X) - a)^2$.

Corollaire 2.17

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(X + b) = V(X)$ et $V(aX) = a^2 V(X)$.

Théorème 2.18 (Additivité de V sur des var indépendantes)

Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Calcul plus général de $V(X + Y)$ (voir chapitre suivant)

Dans le cas général (pas nécessairement d'indépendance) :

Calcul plus général de $V(X + Y)$ (voir chapitre suivant)

Dans le cas général (pas nécessairement d'indépendance) :

► $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$

Calcul plus général de $V(X + Y)$ (voir chapitre suivant)

Dans le cas général (pas nécessairement d'indépendance) :

► $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$

► $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

Calcul plus général de $V(X + Y)$ (voir chapitre suivant)

Dans le cas général (pas nécessairement d'indépendance) :

► $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$

► $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

Définition 2.19 (Variables centrées, réduites)

Calcul plus général de $V(X + Y)$ (voir chapitre suivant)

Dans le cas général (pas nécessairement d'indépendance) :

► $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$

► $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

Définition 2.19 (Variables centrées, réduites)

► Si $E(X) = 0$, on dit que X est centrée ;

Calcul plus général de $V(X + Y)$ (voir chapitre suivant)

Dans le cas général (pas nécessairement d'indépendance) :

► $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$

► $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

Définition 2.19 (Variables centrées, réduites)

- Si $E(X) = 0$, on dit que X est centrée ;
- Si $V(X) = 1$, on dit que X est réduite.

Calcul plus général de $V(X + Y)$ (voir chapitre suivant)

Dans le cas général (pas nécessairement d'indépendance) :

► $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$

► $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$

Définition 2.19 (Variables centrées, réduites)

- Si $E(X) = 0$, on dit que X est centrée ;
- Si $V(X) = 1$, on dit que X est réduite.
- De manière générale si $E(X)$ et $V(X)$ existent, la v.a.r.d.

$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite. On l'appelle
v.a.r.d. centrée réduite associée à X .

III. Rappel des lois classiques discrètes

Lois issues d'un tirage unique

III. Rappel des lois classiques discrètes

Lois issues d'un tirage unique

- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: succès (valeur 1) ou échec (valeur 0) lors d'un tirage déséquilibré

III. Rappel des lois classiques discrètes

Lois issues d'un tirage unique

- ▶ Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: succès (valeur 1) ou échec (valeur 0) lors d'un tirage déséquilibré
- ▶ Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$: tirage équiprobable dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N .

Lois issues d'une répétition de tirages **avec remise**

Lois issues d'une répétition de tirages **avec remise**

- Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: **nombre de succès** lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Lois issues d'une répétition de tirages **avec remise**

- ▶ Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: **nombre de succès** lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
- ▶ Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: **temps d'attente du premier succès** lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Lois issues d'une répétition de tirages **avec remise**

- ▶ Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: **nombre de succès** lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
- ▶ Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: **temps d'attente du premier succès** lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
- ▶ Loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p)$ (hors-programme) : **temps d'attente du r -ième succès** lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Lois issues d'une répétition de tirages **avec remise**

- ▶ Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: **nombre de succès** lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
- ▶ Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: **temps d'attente du premier succès** lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
- ▶ Loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p)$ (hors-programme) : **temps d'attente du r -ième succès** lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
- ▶ Loi binomiale négative $\mathcal{J}(r, p)$ (hors-programme) : **Nombre d'échecs précédant le r -ième succès** lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Lois issues d'une répétition de tirages **sans remise**

Lois issues d'une répétition de tirages **sans remise**

- Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$: **nombre de succès** (boules blanches tirées) lors d'une succession de n tirages sans remise dans une urne contenant initialement N boules dont exactement Np boules blanches.

Lois issues d'une répétition de tirages **sans remise**

- ▶ **Loi hypergéométrique** $\mathcal{H}(N, n, p)$: **nombre de succès** (boules blanches tirées) lors d'une succession de n tirages sans remise dans une urne contenant initialement N boules dont exactement Np boules blanches.
- ▶ **Loi sans nom** (hors-programme) : **Temps d'attente du premier ou du r -ième succès**, dans le même contexte.

Lois issues d'une répétition de tirages **sans remise**

- ▶ **Loi hypergéométrique** $\mathcal{H}(N, n, p)$: **nombre de succès** (boules blanches tirées) lors d'une succession de n tirages sans remise dans une urne contenant initialement N boules dont exactement Np boules blanches.
- ▶ **Loi sans nom** (hors-programme) : **Temps d'attente du premier ou du r -ième succès**, dans le même contexte.

Lois sans expérience associée

Lois issues d'une répétition de tirages **sans remise**

- ▶ **Loi hypergéométrique** $\mathcal{H}(N, n, p)$: **nombre de succès** (boules blanches tirées) lors d'une succession de n tirages sans remise dans une urne contenant initialement N boules dont exactement Np boules blanches.
- ▶ **Loi sans nom** (hors-programme) : **Temps d'attente du premier ou du r -ième succès**, dans le même contexte.

Lois sans expérience associée

- ▶ **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$: modélise souvent l'**affluence** (à un guichet par exemple).

Nom	Paramètres	Notation	Valeurs	Loi	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathcal{U}(n)$	$[1, n]$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$
Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale	(n, p)	$\mathcal{B}(n, p)$	$[0, n]$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
Géométrique	p	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal	(r, p)	$\mathcal{P}(r, p)$	$[r, +\infty[$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Binomiale négative	(r, p)	$\mathcal{J}(r, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p}$
Hypergéométrique	(N, n, p)	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$\subset [0, n]$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq \frac{N-n}{N-1}$
Attente 1 ^{er} succès (tirage sans remise)	(N, p)		$[1, Nq + 1]$	$P(X = k) = \frac{Np}{k} \cdot \frac{\binom{Nq}{k-1}}{\binom{N}{k}}$		
Attente r^e succès (tirage sans remise)	(r, N, p)		$[r, Nq + r]$	$P(X = k) = \frac{r}{k} \frac{\binom{Np}{r} \binom{Nq}{k-r}}{\binom{N}{k}}$		
Poisson	$\lambda \in \mathbb{R}_+$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ